Technická univerzita v Liberci

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Studijní program: N7503 Učitelství pro základní školy

Studijní obor: Učitelství fyziky pro 2. stupeň základní školy
Učitelství matematiky pro 2. stupeň základní školy

Příprava žáků k přijímacím zkouškám z matematiky na střední školu

Preparing students for entrance exams in mathematics at high school

Diplomová práce: 2012–FP–KMD– 004

Autor:

Bc. Zdeňka HORÁKOVÁ

Podpis:

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
143	7	8	5	33	6

V Liberci dne: 20. 4. 2012

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Akademický rok: **2010/2011**

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(PROJEKTU, UMĚLECKÉHO DÍLA, UMĚLECKÉHO VÝKONU)

Jméno a příjmení:	**Bc. Zdeňka Horáková**
Osobní číslo:	**P10000964**
Studijní program:	**N7503 Učitelství pro základní školy**
Studijní obory:	**Učitelství fyziky pro 2. stupeň základní školy**
	Učitelství matematiky pro 2. stupeň základní školy
Název tématu:	**Příprava žáků k přijímacím zkouškám z matematiky na střední školu**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky a didaktiky matematiky**

Zásady pro vypracování:

Požadavky: Znalost učiva základní školy a výstupů na konci 9. ročníku stanovených v RVP pro základní vzdělávání. Seznámit se s požadavky středních škol na znalosti žáků z matematiky.
Cíl: Na vybrané téma učiva matematiky na 2. stupni základní školy zpracovat a navrhnout postup s využitím různých metod při přípravě na přijímací zkoušky na střední školu. Sestavit sbírku řešených úloh, která bude využitelná při přípravě žáků na přijímací testy. Tuto otestovat a vyhodnotit její účinnost na základě předem stanovených kriterií.
Metody: Vytvoření souboru řešených úloh Praktické ověření souboru ve škole Vyhodnocení účinnosti navrženého souboru

Rozsah grafických prací:

Rozsah pracovní zprávy:

Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam odborné literatury:

Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2. SPN Bratislava, 1990
Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání
Přijímací testy z matematiky pro střední školy, zaměření na gymnázia.
Sborníky matematických olympiád a soutěží.
Sbírky úloh.
Zajímavá a zábavná matematika.
http://www.zkousky-nanecisto.cz/modules.php?name=Newsfile=article&sid=29&menuzvol=devata

Vedoucí diplomové práce: **doc. RNDr. Jana Příhonská, Ph.D.**
Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Datum zadání diplomové práce: **22. března 2011**
Termín odevzdání diplomové práce: **27. dubna 2012**

L.S.

15. 9. 2011

doc. RNDr. Miroslav Brzezina, CSc.
děkan

doc. RNDr. Jaroslav Mlýnek, CSc.
vedoucí katedry

dne 21-09-2011

Čestné prohlášení

Název práce: Příprava žáků k přijímacím zkouškám z matematiky na střední školu

Jméno a příjmení autora: Zdeňka Horáková

Osobní číslo: P10000964

Byla jsem seznámena s tím, že na mou diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména § 60 – školní dílo.

Prohlašuji, že má diplomová práce je ve smyslu autorského zákona výhradně mým autorským dílem.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé diplomové práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li diplomovou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědoma povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Diplomovou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím diplomové práce.

Prohlašuji, že jsem do informačního systému STAG vložila elektronickou verzi své diplomové práce, která je identická s tištěnou verzí předkládanou k obhajobě, a uvedla jsem všechny systémem požadované informace pravdivě.

V Liberci dne: 20. 4. 2012

Zdeňka Horáková

Poděkování

Ráda bych poděkovala všem, kteří mi pomáhali při vypracování mé diplomové práce. Na prvním místě patří mé poděkování vedoucí diplomové práce, doc. RNDr. Janě Příhonské, Ph.D., které děkuji za její trpělivost, ochotu a všestrannou pomoc. Dále děkuji své rodině, partnerovi a přátelům, kteří mi při vytváření mé práce byli oporou.

Příprava žáků k přijímacím zkouškám z matematiky na střední školu

Anotace

Diplomová práce se zabývá přípravou žáků k přijímacím zkouškám z matematiky na střední školu.

V úvodu je stručně uvedeno, jaké učivo z matematiky by měl znát každý absolvent základní školy. Okrajově jsou zde uvedeny náležitosti přijímacího řízení.

Hlavní část práce se věnuje tématům, která se často vyskytují v přijímacích testech z matematiky na SŠ. K těmto tématům uvádí základní teoretická tvrzení doplněná souborem řešených a neřešených úloh. Celý soubor byl prakticky ověřen na vzorku žáků 9. ročníku a následně bylo provedeno vyhodnocení, které je v práci uvedeno.

Klíčová slova: algebraické výrazy, číselné a logické řady, funkce, lineární rovnice a jejich soustavy, logické a netradiční geometrické úlohy, magické čtverce, mocniny, nejmenší společný násobek, největší společný dělitel, objem, obsah, obvod, odmocniny, podobnost, poměr, povrch, přijímací řízení, Rámcově vzdělávací program, úhel, úlohy o společné práci

Preparing students for entrance exams in mathematics at high school

Annotate

This thesis deals with the preparation of students for entrance examinations in mathematics in high school.

In introduction is briefly specifying which subject matter of mathematics should know each graduate school. Marginally here are the particulars of admission procedure.

The main part is devoted to topics that often appear in the entrance tests of mathematics at secondary school. These topics provide basic theoretical claims complemented by a set of solved and unsolved problems. The entire file has been practically tested on a sample of pupils 9th year and subsequently an evaluation, which is working shown.

Keywords: algebraic expressions, numerical and logical sequences, functions, linear equations and their systems, and unconventional geometric logic tasks, magic squares, squares, least common multiple, greatest common divisor, volume, content, perimeter, roots, similarity, ratio, surface, admissions, general educational program, the angle, the task of working together

La préparation des élèves pour les examens d'entrée en mathématiques à l'école secondaire

Résumé

Cette thèse traite de la préparation des élèves pour les examens d'entrée en mathématiques à l'école secondaire.

L'introduction de mentionner brièvement le sujet des mathématiques doit connaître les uns les études supérieures. Marginalement voici les détails de la procédure d'admission.

La partie principale est consacrée à des sujets qui apparaissent souvent dans les tests d'entrée de mathématiques à l'école secondaire. Ces sujets de base fournit prétentions théoriques complétés par un ensemble de problèmes résolus et non résolus. L'ensemble du dossier a été pratiquement testé sur un échantillon d'élèves 9e année, puis une évaluation, qui travaille dehors.

Mots-clés: les expressions algébriques, des séquences numériques et logiques, les fonctions, les équations linéaires et leurs systèmes, et non conventionnelles tâches logiques géométriques, carrés magiques, des places, plus petit commun multiple, le plus grand commun diviseur, le volume, le contenu, le périmètre, la racine carrée, la similitude, le rapport, surface, les admissions, le programme d'enseignement général, l'angle, le rôle du travail en commun.

Obsah:

Seznam použitých symbolů

$D(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ .... největší společný dělitel čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$

D(f) ....definiční obor funkce *f*

H(f) ....obor hodnot funkce *f*

$n(n_1, n_2, \ldots, n_k)$....................................nejmenší společný násobek čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$

C...množina komplexních čísel

M ....obecná množina

N..množina přirozených čísel

R..množina reálných čísel

$\wedge$..a zároveň

$\vee$..nebo

$\in$..je prvkem, náleží množině

$\neq$ .... je různý

Úvod

Přechod ze základní školy na školu střední je významný mezník v životě každého člena naší společnosti. Něco starého končí a něco nového začíná.

Pro některé žáky to může být stresové období života. Musí se rozhodnout, kam chtějí směřovat svou budoucnost, ujasnit si, čím se jednou chtějí živit. V tomto okamžiku si musí vybrat střední školu, která jim poskytne vzdělání v oboru, který si vybrali. Ne každý žák je však automaticky na jím vybranou školu přijat, některé školy stále vypisují různé přijímací zkoušky, nejčastěji však z českého jazyka, matematiky a všeobecných znalostí. Někteří žáci se přijímacích zkoušek tak obávají, že raději volí jinou školu bez přijímaček, alternativu, která je pro ně v danou chvíli mnohem snazší cestou.

Je politování hodné, že již v tak mladém věku se někteří žáci vzdávají svých snů a jen kvůli strachu z přijímacích zkoušek volí jinou školu, často i úplně jiný obor. Proto jsem připravila tuto diplomovou práci. Na základě dřívějších testů jsem vybrala témata, která se nejčastěji v přijímacích zkouškách z matematiky vyskytují. K těmto tématům jsem shrnula základní teoretická fakta a uvedla několik řešených příkladů. Po souboru řešených příkladů následuje soubor příkladů neřešených s výsledky, kde si žáci mohou ověřit, kterou z daných oblastí již zvládli a kterou musí ještě jednou zopakovat. Domnívám se, že tato diplomová práce by mohla mnohým žákům pomoci v jejich samostatné přípravě na přijímací zkoušky a pomoci jim odbourat strach z neúspěchu v testu z matematiky. Zároveň by mohla sloužit i učitelům matematiky na základních školách jako inspirace či sbírka do hodin.

Práce je členěná do tří hlavních částí: Teoretická část, Praktická část a Výzkumná část. Každá z těchto částí je pak rozdělena do dalších podkapitol.

Teoretická část se věnuje postavení matematiky v českém základním školství (RVP ZV) a přijímacímu řízení.

V praktické části se čtenář setká se souborem řešených úloh, souborem neřešených úloh s výsledky, zadáním Vstupního testu, Výstupního testu a dotazníku. Soubor řešených příkladů je rozdělen do čtyř hlavních podkapitol, které odpovídají RVP ZV (Číslo a proměnná; Závislosti, vztahy a práce s daty; Geometrie v rovině a prostoru; Nestandardní aplikační úlohy a problémy). Ve sbírce řešených příkladů je v zelených rámečcích uvedena základní teorie, která by ovšem neměla sloužit jako jediný studijní text, nýbrž pouze jako připomenutí již známého učiva. Po teoretické části následuje několik řešených příkladů, jejichž zadání je pro lepší orientaci v oranžovém poli. Po souboru řešených příkladů následuje soubor neřešených příkladů s výsledky, který je opět rozdělen do čtyř podkapitol odpovídajících opět tematickým okruhům podle RVP ZV. Za každým neřešeným příkladem je uveden správný výsledek. Dále žák v praktické části najde dotazník, Vstupní a Výstupní test, které byly zadány žákům, ale které mohou sloužit také jako procvičení toho, co žáci sami procvičili v souborech řešených a neřešených příkladů.

Ve výzkumné části jsou pak shrnuty výsledky Vstupního testu, dotazníku a Výstupního testu. Výsledky jsou pro přehlednost zpracovány graficky, ale čtenář zde najde i slovní popis.

Témata matematiky, kterým se tato práce věnuje, byla vybrána na základě studia dřívějších přijímacích testů a SCIO testů tak, aby co nejvíce pokrývala to, co se nejčastěji vyskytuje v přijímacích zkouškách z matematiky na SŠ. Práci je tedy možné do budoucna rozšířit o další oblasti matematiky, které se v přijímacích zkouškách vyskytují méně frekventovaně. Tak by se pokryla celá škála matematických schopností a vědomostí, jež by měl mít každý žák, který chce úspěšně složit přijímací zkoušky z matematiky.

I. Teoretická část

1.1 Očekávané výstupy podle Rámcově vzdělávacího programu

Vzdělávání v Evropě, které upřednostňovalo množství poznatků na úkor jejich provázanosti, dril a „tvrdší“ pravidla oproti rozvoji sociálních vztahů a podobně, přestalo koncem 20. století vyhovovat stále se měnící společnosti. Současná společnost potřebuje cílevědomé, aktivně spolupracující jedince, kteří jsou schopni se rychle přizpůsobit kladeným požadavkům. Proto došlo na evropské půdě a tedy i v České republice k reformě vzdělávání k tzv. kurikulární reformě.

Hlavní podstatou kurikulární reformy je změna cílů a obsahu vzdělávání, tzn. utváření a rozvoj klíčových kompetencí a příprava žáků pro praktický život. Kurikulární reforma v České republice začala probíhat v 90. letech 20. století a vyvrcholila celonárodní diskuzí „Vzdělávání pro 10 milionů“ a vznikem Národního programu vzdělávání v ČR, tzv. Bílou knihou.

Změna kurikula započala tvorbou Rámcových vzdělávacích programů, které vycházejí z nové strategie vzdělávání, z koncepce celoživotního učení a formulují očekávanou úroveň vzdělání absolventů jednotlivých etap vzdělávání. Na druhou stranu mají RVP podporovat pedagogickou autonomii škol a vést učitele k zodpovědnosti za výsledky vzdělávání jejich žáků.

V Rámcově vzdělávacím programu pro základní vzdělávání, dále jen RVP ZV, je obsah vzdělávání rozdělen do devíti vzdělávacích oblastí. Těmito oblastmi jsou: Jazyk a jazyková komunikace (Český jazyk a literatura, Cizí jazyk), Matematika a její aplikace, Informační a komunikační technologie, Člověk a jeho svět, Člověk a společnost (Dějepis, Výchova k občanství), Člověk a příroda (Fyzika, Chemie, Přírodopis, Zeměpis), Umění a kultura (Hudební výchova, Výtvarná výchova), Člověk a zdraví (Výchova ke zdraví, Tělesná výchova), Člověk a svět práce (Člověk a svět práce). Jednotlivé vzdělávací oblasti jsou vymezeny charakteristikou vzdělávací oblasti, jejím cílovým zaměřením, vzdělávacím obsahem a očekávanými výstupy. V diplomové práci se zaměříme pouze na oblast Matematika a její aplikace. (**Výzkumný ústav pedagogický v Praze**, 2007, [Int 15])

1.1.1 Matematika a její aplikace

1.1.1.1 Charakteristika vzdělávací oblasti

Matematika a její aplikace je oblast, která je nesmírně důležitá pro praktický život každého člověka. Právě pro svou důležitost je součástí celé povinné školní docházky. Žáci si v průběhu vzdělávání osvojují matematické vědomosti aktivními činnostmi, jako je například manipulace s matematickými modely a aplikace matematického aparátu v reálných situacích.

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace je rozdělena na čtyři tematické okruhy. Těmito okruhy jsou:

- ***Čísla a početní operace*** na prvním stupni, který na druhém stupni přechází do okruhu ***Číslo a proměnná***
  - osvojení aritmetických operací tzn. dovednosti provádět operace, chápat proč je prováděna konkrétní operace a umět operaci propojit s reálnou situací
  - seznámení s pojmem proměnná a s jejím využitím při matematizaci reálné situace
- ***Závislosti, vztahy a práce s daty***
  - analýza změn a závislostí pomocí tabulek, grafů, diagramů, jednoduché matematické předpisy vyjadřující závislost
  - zkoumání závislostí směřuje k pochopení pojmu funkce
- ***Geometrie v rovině a prostoru***
  - rozpoznání a znázornění geometrických útvarů, využití znalostí o geometrických útvarech v řešení reálných situací
  - měření délek, velikostí úhlů, obvodů, obsahů, povrchů, objemů
- ***Nestandardní aplikační úlohy a problémy***
  - uplatnění logického myšlení, do jisté míry nezávislé na školské matematice
  - řešení problémových úloh z běžného života (analýza problému, utřídění údajů a podmínek, provádění náčrtků, řešení optimalizačních úloh)
  - zdokonalení samostatné práce se zdroji informací

(**Výzkumný ústav pedagogický v Praze,** 2007, [Int 15])

1.1.1.2 Cílové zaměření vzdělávací oblasti

Vzdělávací oblast Matematika a její aplikace směřuje k utváření a rozvoji klíčových kompetencí tak, že vede žáka k tomu, aby:

- využíval matematické poznatky a dovednosti v praktických činnostech jako jsou: odhady, měření, porovnávání velikostí a vzdáleností, orientace
- rozvíjel paměť prostřednictvím numerických výpočtů, osvojováním si nezbytných matematických vzorců a algoritmů
- rozvíjel kombinatorické a logické myšlení, kritické usuzování a srozumitelné a věcné argumentování prostřednictvím řešení matematických problémů
- rozvíjel abstraktní a exaktní myšlení osvojováním si a využíváním základních matematických pojmů a vztahů, aby poznával jejich charakteristické vlastností a na jejich základě určoval a zařazoval pojmy
- vytvářel zásoby matematických nástrojů (početních operace, algoritmy, metody řešení úloh) a efektivně využíval osvojený matematický aparát
- vnímal složitosti reálného světa a porozuměl mu; rozvíjel zkušenosti s matematickým modelováním (matematizací reálných situací), vyhodnocoval matematický model a hranice jeho využití; aby si uvědomil, že skutečné situace jsou složitější než jejich matematické modely, že dané modely můžou odpovídat různým situacím a zároveň jedna situace může odpovídat různým matematickým modelům
- prováděl rozbor problému a plánoval jeho řešení, odhadoval výsledky, volil správný postup řešení problému a vyhodnotil správnost výsledku vzhledem k podmínkám úlohy nebo problému
- se vyjadřoval přesně a stručně užitím matematického jazyka a matematické symboliky
- spolupracoval při řešení problémových a aplikovaných úloh vyjadřujících situace z reálného života a následně využíval získané řešení v praxi; poznával možnosti matematiky a skutečnosti, že ke správnému výsledku lze dospět různými způsoby
- rozvíjel důvěru ve vlastní schopnosti a možnosti při řešení úloh, systematičnost, vytrvalost, aby si vytvářel dovednosti vyslovovat hypotézy na základě zkušeností nebo pokusů a tyto hypotézy si ověřoval či vyvracel pomocí protipříkladů

(**Výzkumný ústav pedagogický v Praze**, 2007, [Int 15])

1.1.1.3 Vzdělávací obsah

Vzdělávací obsah na 2. stupni ZŠ

Tematický okruh Číslo a proměnná

Očekávané výstupy:

Žák na konci 2. stupně by měl umět:

- provádět početní operace v oboru celých a racionálních čísel; ve výpočtech umí použít druhou mocninu a odmocninu
- zaokrouhlovat a provádět odhady s danou přesností, účelně využívat kalkulátor
- modelovat a řešit situace s využitím dělitelnosti v oboru přirozených čísel
- užívat různé způsoby kvantitativního vyjádření vztahu mezi celkem a jeho částí (přirozeným číslem, poměrem, zlomkem, desetinným číslem, procentem)
- řešit modelováním a výpočtem situace vyjádřené poměrem; pracovat s měřítky map
- řešit aplikační úlohy na procenta
- matematizovat jednoduché reálné situace s využitím proměnných; určit hodnotu výrazu, pracovat s mnohočleny (+, – , ·, :, vytýkání)
- formulovat a řešit reálné situace pomocí rovnic a jejich soustav
- analyzovat a řešit jednoduché problémy, modelovat konkrétní situace, využívat matematický aparát v oboru celých a racionálních čísel

(**Výzkumný ústav pedagogický v Praze**, 2007, [Int 15])

„Učivo

- dělitelnost přirozených čísel – prvočíslo, číslo složené, násobek, dělitel, nejmenší společný násobek, největší společný dělitel, kritéria dělitelnosti

- celá čísla – čísla navzájem opačná, číselná osa

- desetinná čísla, zlomky – rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě; převrácené číslo, smíšené číslo, složený zlomek

- poměr – měřítko, úměra, trojčlenka

- procenta – procento, promile; základ, procentová část, počet procent; jednoduché úrokování

- mocniny a odmocniny – druhá mocnina a odmocnina

- výrazy – číselný výraz a jeho hodnota; proměnná, výrazy s proměnnými, mnohočleny

- rovnice – lineární rovnice, soustava dvou lineárních rovnic se dvěma neznámými“

(**Výzkumný ústav pedagogický v Praze**, 2007, s.32, [Int 15])

Tematický okruh Závislosti, vztahy a práce s daty

Očekávané výstupy:

Žák na konci 2. stupně by měl být schopen:

- vyhledávat, vyhodnocovat a zpracovávat data
- porovnávat soubory dat
- určit vztah přímé nebo nepřímé úměrnosti
- vyjádřit funkční vztah tabulkou, rovnicí, grafem
- matematizovat jednoduché reálné situace s využitím funkčních vztahů

(**Výzkumný ústav pedagogický v Praze**, 2007, [Int 15])

*„**Učivo***

- *závislosti a data – příklady závislostí z praktického života a jejich vlastnosti, nákresy, schémata, diagramy, grafy, tabulky; četnost znaku, aritmetický průměr*

- *funkce – pravoúhlá soustava souřadnic, přímá úměrnost, nepřímá úměrnost, lineární funkce“* (**Výzkumný ústav pedagogický v Praze**, 2007, s. 33, [Int 15])

Tematický okruh Geometrie v rovině a v prostoru

Očekávané výstupy

Žák na konci 2. stupně by měl být schopen:

- zdůvodnit a využít polohové a metrické vlastnosti základních rovinných útvarů při řešení úloh a jednoduchých praktických problémů; použít matematickou symboliku
- charakterizovat a třídit základní rovinné útvary
- určit velikost úhlu měřením a výpočtem
- odhadnout a vypočítat obsah a obvod základních rovinných obrazců
- používat pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh
- načrtnout a sestrojit rovinné útvary
- použít věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků
- načrtnout a sestrojit obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti, určit osově a středově souměrný útvar
- poznat základní prostorové útvary (tělesa) a využívat jejich vlastnosti při řešení jednoduchých úloh
- odhadnout a vypočítat objem a povrch těles, sestrojit jejich síť a u jednoduchých těles načrtnout jejich obraz v rovině
- analyzovat a řešit aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu (**Výzkumný ústav pedagogický v Praze**, 2007, [Int 15])

*„**Učivo***

- *rovinné útvary – přímka, polopřímka, úsečka, kružnice, kruh, úhel, trojúhelník, čtyřúhelník (lichoběžník, rovnoběžník), pravidelné mnohoúhelníky, vzájemná poloha přímek v rovině (typy úhlů), shodnost a podobnost (věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků)*

- *metrické vlastnosti v rovině – druhy úhlů, vzdálenost bodu od přímky, trojúhelníková nerovnost, Pythagorova věta*

- *prostorové útvary – kvádr, krychle, rotační válec, jehlan, rotační kužel, koule, kolmý hranol*

- *konstrukční úlohy – množiny všech bodů dané vlastnosti (osa úsečky, osa úhlu, Thaletova kružnice), osová souměrnost, středová souměrnost“*

(**Výzkumný ústav pedagogický v Praze**, 2007, s. 33, [Int 15])

Tematický okruh Nestandardní aplikační úlohy a problémy

Očekávané výstupy

Žák by měl být na konci 2. stupně schopen:

- logicky uvažovat při řešení úloh a problémů a nalézat různá řešení předkládaných nebo zkoumaných situací
- řešit úlohy na prostorovou představivost, aplikovat a propojovat získané poznatky a dovednosti z různých tematických a vzdělávacích oblastí

*„**Učivo***

- *číselné a logické řady*

- *číselné a obrázkové analogie*

- *logické a netradiční geometrické úlohy*“

(**Výzkumný ústav pedagogický v Praze**, 2007, s. 33, [Int 15])

1.2 Přijímací řízení

Po ukončení povinné devítileté školní docházky mohou žáci pokračovat v dalším vzdělávání na SŠ. Od roku 2009 do 12. 1. 2012 měli žáci možnost podávat si tři přihlášky na SŠ, od tohoto data se na základě novely školského zákona č. 472/2011 Sb. počet podávaných přihlášek snížil na dvě přihlášky v prvním kole.

Střední školy postupují při přijímání žáků a uchazečů podle Vyhlášky MŠMT č. 394/2008 Sb. která mění vyhlášku MŠMT č.671/2004 Sb, o přijímání žáků a dalších uchazečů ke studiu ve středních školách zřizovaných státem, ve znění pozdějších předpisů. Tato vyhláška stanovuje formální postup přijímacího řízení a vymezuje časový průběh.

(**MŠMT**, 2008, [Int 9])

Ředitelé škol rozhodnou, zda se v rámci přijímacího řízení budou konat i přijímací zkoušky popřípadě z jakých předmětů. Tradičně se skládají zkoušky z českého jazyka, matematiky, všeobecných znalostí, popřípadě talentové zkoušky. (**MŠMT**, 2008, [Int 9])

V současné době díky snížení počtu absolventů základních škol, jsou žáci přijímáni ke studiu na SŠ většinou na základě průměru známek na vysvědčení z osmého a prvního pololetí devátého ročníku základní školy, dle výsledků v různých olympiádách a soutěžích apod. Žáci jsou pak zváni jen k ústním pohovorům s pedagogy, které neověřují žákovy znalosti, ale pouze jeho motivaci k studiu na dané SŠ. Přijímaný počet žáků se příliš neliší od počtu přihlášených.

Situace se liší podle jednotlivých oblastí, což je dáno počtem škol a počtem uchazečů. Není proto možné zmapovat všechny oblasti. Z tohoto důvodu se dále soustředíme pouze na vybrané školy v Ústeckém kraji, konkrétně v regionu Litoměřicko.

1.2.1. Přijímací řízení na školní rok 2012/2013 Litoměřicko

V této kapitole uvádím přehled SŠ na Litoměřicku, neboť je to oblast, kde jsem aplikovala soubor.

OP - obecné studijní předpoklady

TZ - talentové zkoušky

Tabulka 1

Název školy	**Obor nebo zaměření**	**Délka studia**	**Počet přijímaných na rok 2012/2013**	**Přihl./přijato 2011/2012**	**Přijímací zkoušky**
Gymnázium Josefa Jungmanna, Litoměřice, Svojsíkova 1, příspěvková organizace	Gymnázium	4	-	117/43	-
Gymnázium, Lovosice, Sady pionýrů 600, příspěvková organizace	Gymnázium všeobecné	4	30	94/87	-
Gymnázium, Roudnice nad Labem, Havlíčkova 75, příspěvková organizace	Gymnázium	4	55	57/55	-

Gymnázium, Střední odborná škola a Střední odborné učiliště, o.p.s. Litoměřice	Gymnázium	4	20	7/7	-
	Ekonomika a podnikání (Finanční a daňový specialista)	4	15	3/3	-
	Grafický design	4	30	28/28	TZ
	Nábytkářská a dřevařská výroba	4	15	9/9	-
	Oděvnictví	4	15	0/0	-
	Scénická a výstavní tvorba	4	15	0/0	TZ
	Kosmetické služby	4	30	16/16	-
	Aranžér	3	15	8/8	-
	Kadeřník	3	40	15/15	-
	Krejčí	3	15	0/0	--
	Kuchař- číšník	3	15	1/1	-
	Truhlář	3	24	25/24	-
	Úmělecký truhlář a řezbář	3	10	0/0	TZ
Vyšší odborná škola, Obchodní akademie a Střední odborná škola EKONOM, O.p.s., Litoměřice	Ekonomika a podnikání	4	30	12/0	OP
	Obchodní akademie	4	30	14/10	OP
Soukromá podřipská střední odborná škola a střední odborné učiliště o.p.s.	Finanční služby	4	24	18/8	-
	Hotelnictví	4	24	18/12	-
	Management cestovního ruchu	4	24	22/14	-
	Management obchodu	4	24	28/16	-
	Kadeřník	3	12	18/11	-
	Prodavač	3	10	4/0	-
Soukromá střední odborná škola s. r. o.	Ekonomika a podnikání (Ekonomika pro praxi)	4	24	13/6	-
	Ekonomika a podnikání (Reklamní výtvarnictví)	4	18	1/0	-
	Ekonomika a podnikání (Výpočetní technika)	4	24	2/0	-
	Informační technologie	4	24	30/12	-
	Veřejnosprávní činnost	4	24	21/8	-
Střední odborná škola a Střední odborné učiliště, Neklanova 1806, Roudnice nad Labem	Dopravní prostředky	4	30	32/22	-
	Sociální činnost	4	30	34/19	-
	Instalatér	3	30	21/6	-
	Karosář	3	30	23/10	-
	Mechanik opravář motorových vozidel	3	30	35/18	-
	Obráběč kovů	3	30	6/0	-
	Zedník	3	30	14/6	-
	Pečovatelské služby	3	30	27/17	-
	Zednické práce	3	20	0/0	-

Střední odborná škola technická a zahradnická, Lovosice, příspěvková organizace	Aplikovaná chemie	4	25	10/8	-
	Autotronik	4	24	41/36	-
	Mechanik opravář motorových vozidel	3	24	52/38	-
	Operátor skladování	3	24	11/11	-
	Opravář zemědělských strojů	3	24	29/29	-
	Prodavač	3	24	15/15	-
	Strojní mechanik (zahradník)	3	20	10/10	-
	Truhlář	3	30	31/31	-
	Zahradník	3	30	8/8	-
	Opravářské práce	3	14	20/16	-
	Stravovací a ubytovací služby	3	14	19/17	-
	Zahradnické práce	3	14	9/7	-
Střední pedagogická škola J.H. Pestalozziho, Litoměřice, Komenského 3, příspěvková organizace	Pedagogické lyceum	4	30	96/29	-
	Předškolní a mimoškolní pedagogika	4	60	112/26	-
	Sociální činnost (Výchovná a humanitární činnost)	4	30	108/54	-
Střední škola POHODA, s.r.o, Litoměřice	Cestovní ruch	4	30	0/0	-
	Kosmetické služby	4	30	10/9	-
	Masér sportovní a rekondiční	4	30	0/0	-
	Cukrář	3	20	8/8	-
	Kadeřník	3	30	20/20	-
	Kuchař- číšník	3	20	8/8	-
	Rekondiční a sportovní masér	3	30	14/14	-
	Cukrářské práce	3	15	8/8	-
	Kuchařské práce	3	15	7/7	-
Vyšší odborná škola a Střední odborná škola Roudnice nad Labem, Špindlerova 690, příspěvková organizace	Agropodnikání	4	30	37/30	-
	Dopravní prostředky	4	60	83/60	-
	Ekonomické lyceum	4	30	67/30	-
Vyšší odborná škola obalové techniky a Střední škola, Štětí, Kostelní 134, příspěvková organizace	Informační technologie	4	30	48/48	-
	Informační technologie	4	30	80/65	-
	Obalová technika	4	30	47/47	-
	Mechanik elektrotechnik	4	30	26/26	-
	Truhlář	3	25	28/28	-

Střední škola hotelnictví, gastronomie a služeb, Litoměřice, Dlouhá 6, příspěvková organizace	Ekonomika a podnikání	4	30	38/30	-
	Hotelnictví	4	30	77/60	-
	Informační technologie	4	30	32/24	-
	Instalatér	3	24	20/20	-
	Kuchař-číšník	3	90	61/57	-
	Mechanik opravář motorových vozidel	3	30	14/12	-
	Zedník	3	10	16/16	-
Soukromé střední odborné učiliště INDUSTRIA, Litoměřice	Kosmetické služby	4	20	14/14	-
	Kadeřník	3	20	20/18	-

(**Úřad práce ČR**, 2011, [11])

Z tabulky 1 vyplývá, že zájem SŠ o uchazeče převyšuje zájem uchazečů v mnoha případech. Přestože by se tedy mohlo zdát, že je pro žáky v současné době zbytečné se připravovat na přijímací řízení, domnívám se, že se jedná pouze o momentální trend. Nyní do škol nastupují silnější ročníky, a tak za pár let bude možné, aby si střední školy studenty opět vybíraly na základě úspěchu u přijímacích zkoušek.

Je také nutné podotknout, že jen v Ústeckém kraji je situace v každé oblasti jiná. Uvádím zde oblast Litoměřicko, neboť jsem v této oblasti aplikovala soubor a chtěla jsem tak ukázat, že žáci v této oblasti nemají téměř žádnou motivaci k přípravě na přijímací zkoušky. V této oblasti jsou přijímáni bez přijímacích zkoušek. Pokud by však chtěli jít studovat do jiné oblasti jako je Děčínsko, Chomutovsko, Lounsko, Mostecko a Teplicko, museli by na některých školách přijímací zkoušky z matematiky skládat.

(**Úřad práce ČR**, 2011, [11])

Soubor, který uvádím, je však možné využít nejen k přípravě žáků na přijímací zkoušky, ale i k samostatnému opakování či jako inspiraci pro učitele do hodin matematiky.

II. Praktická část

Cílem diplomové práce je:

- zmapovat zaměření přijímacích zkoušek z matematiky ve vybraném regionu
- vytvořit soubor řešených úloh na vybrané oblasti matematiky, které jsou z velké části zastoupeny v přijímacích testech z matematiky
- sestavit soubor neřešených úloh k dalšímu procvičení
- realizovat navržený soubor úloh v praxi ve škole a ověřit jeho přínos ke zvýšení úspěšnosti žáků při řešení těchto úloh

K realizaci cílů diplomové práce jsem stanovila hypotézy (viz kapitola 2.1 str. 24), k jejichž ověření jsem sestavila soubor řešených příkladů (viz kapitola 2.2 str. 25), na který navazuje soubor neřešených příkladů (viz kapitola 2.3 str. 97). Dále jsem sestavila Vstupní test (viz kapitola 2.4 str. 106) a dotazník (viz kapitola 2.5 str. 109). V závěru jsem vytvořila Výstupní test (viz kapitola 2.6 str. 111), jehož výsledky jsou využity k porovnání úspěšnosti sbírky před a po její aplikaci. V praktické části diplomové práce je uvedeno mnoho obrázků, není-li uvedeno jinak, jedná se o obrázky vytvořené v programu Microsoft Excel a Malování.

2.1 Stanovené hypotézy

Před aplikací sbírky jsem očekávala, že se žáci devátých ročníků příliš nepřipravují na přijímací řízení. Očekávala jsem, že jejich schopnosti aplikovat dříve získané vědomosti v praktických úlohách Vstupního testu (viz kapitola 2.4.1 str. 108) budou nižší, neboť látka nebyla opakována, a tudíž ji většina žáků úspěšně zapomněla. Na základě těchto předpokladů jsem stanovila následující hypotézy:

Hypotéza H1: Za obtížné žáci považují geometrické úlohy, zejména v případě prostorové představivosti.

Hypotéza H2: Pro žáky je velmi problematické řešit komplexní úlohy.[1]

Hypotéza H3: Cílené řešení úloh ovlivňuje pozitivně rychlost a úspěšnost řešení. Toto se projeví ve vyšší úspěšnosti Výstupního testu.

Hypotéza H4: Bonusové příklady bývají často zadávány, aby žáci získali více bodů. Předpokládám tedy, že i v tomto případě se soustředí na jeho řešení a budou celkem úspěšní.

---

[1] Komplexní úlohou se rozumí úloha, při jejímž řešení je nutné aplikovat vědomosti z více oblastí matematiky.

2.2 Soubor řešených příkladů

Na základě prostudování ukázek přijímacích zkoušek z matematiky na SŠ (sbírka přijímacích zkoušek, ukázky SCIO testů na internetových stránkách, ukázky přijímacích testů na stránkách jednotlivých středních škol) jsem vybrala typy příkladů, se kterými se žáci pravděpodobně setkají v přijímacích zkouškách z matematiky na SŠ. Tyto typy příkladů jsem rozdělila do čtyř oblastí, které odpovídají RVP ZV, uvedla jsem k nim základní teoretická východiska a připojila řešené příklady. Jestliže jsou teoretická východiska v uvozovkách a jsou psána kurzívou, jedná se o přímou citaci, pokud není text psán kurzívou, jedná se o citaci nepřímou.

V současné době se na většině středních škol přijímací zkoušky nekonají, ale přesto tuto sbírku mohou žáci použít k samostatnému procvičování či opakování, popřípadě k ověření svých momentálních znalostí.

2.2.1 Číslo a proměnná

V této kapitole jsou zařazena témata, která odpovídají podle RVP ZV v oblasti Matematika a její aplikace tematickému okruhu *Číslo a proměnná* (viz. kapitola 1.1.1.3 str.17). Do tohoto okruhu spadá: Největší společný dělitel a metody jeho určení, Nejmenší společný násobek a metody jeho určení, Poměr, Procenta, Mocniny a odmocniny, Lineární rovnice a jejich soustavy, Výrazy a jejich úpravy.

2.2.1.1. Největší společný dělitel

„SPOLEČNÝM DĚLITELEM přirozených čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$ nazýváme přirozené číslo, které je dělitelem každého z těchto čísel. Ten ze společných dělitelů, který je větší než všichni ostatní společní dělitelé, se nazývá NEJVĚTŠÍ SPOLEČNÝ DĚLITEL čísel $n_1, n_2, \ldots, n_k$ a označuje se $\mathbf{D(n_1, n_2, \ldots, n_k)}$*.“* (**Polák**, 1980, str. 36, [8])

Nechť $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$, pak největší společný dělitel těchto čísel je definován:

$\mathbf{D(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \max \{n \in N: n|n_1 \wedge n|n_2 \wedge \ldots \wedge n|n_k\}}$ ([**W1**], 2007)

„Je-li $D(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 1$, říkáme, že přirozená čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k$ jsou NESOUDĚLNÁ ČÍSLA.“ (**Polák**, 1980, str. 36, [8])

V následující části uvidíme, že při hledání největšího společného dělitele i nejmenšího společného násobku potřebujeme rozložit číslo na součin prvočísel. K rozkladu pak využíváme kritéria dělitelnosti. Nejzákladnější kritéria dělitelnosti jsou shrnuta v následující tabulce:

Tabulka 2

Číslo je dělitelné		Příklad čísla, které je dělitelné	Příklad čísla, které není dělitelné
2	je- li poslední cifra sudé číslo	432	617
3	je-li ciferný součet dělitelný třemi.	231	364
4	je-li poslední dvojčíslí dělitelné 4	544	347
5	je-li poslední cifra číslo 0 nebo 5.	465	378
6	je-li dělitelné číslem 2 a současně číslem 3.	432	532
8	je-li jeho poslední trojčíslí dělitelné 8.	876 256	654 329
9	je-li jeho ciferný součet dělitelný 9.	523 413	356 543
10	je-li jeho poslední cifra číslo 0.	670	875
11	je-li rozdíl součtu cifer na lichých a sudých místech dělitelný jedenácti nebo roven 0	28 578	77 211

(**Polák**, 1980, [8])

Při hledání největšího společného dělitele můžeme postupovat různými metodami:

Metoda výběru

Tato metoda je využívána především u dětí mladšího školního věku. Spočívá ve vypsání všech možných dělitelů zadaných čísel a následném vybrání největšího společného dělitele (vhodné u menších čísel).

Metoda prvočíselného rozkladu

Nechť máme čísla $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbf{N}$, pak při hledání největšího společného dělitele těchto čísel metodou prvočíselného rozkladu postupujeme takto:

a) Nejprve rozložíme čísla $n_1, n_2, \dots, n_k$, jejichž největšího společného dělitele hledáme, na součin prvočísel.

b) Vybereme prvočísla, která se nacházejí v prvočíselném rozkladu všech čísel $n_1, n_2, \dots, n_k$.

c) Tato prvočísla vynásobíme, čímž dostaneme největšího společného dělitele čísel $n_1, n_2, \dots, n_k$. Značíme **D** $\mathbf{(n_1, n_2, \dots, n_k)}$. (**Polák**, 1980, [8])

Euklidův algoritmus

Tento algoritmus se používá pro zjištění největšího společného dělitele dvou přirozených čísel.

Nechť $a_0 \geq a_1$ jsou dvě přirozená čísla. Pak Euklidův algoritmus pro největšího společného dělitele D (a_0, a_1) zní: *„Známe-li a_{i-1} a a_i spočteme $a_{i+1} = (a_{i-1}) \bmod a_i$. Tedy víme, že existuje takové $q_i \in$ **N**, že $a_{i-1} = q_i a_i + a_{i+1}$ a $a_{i+1} < a_i$. Algoritmus skončí, když $a_{n+1} = 0$, potom $a_n = D(a_0, a_1)$."* (**Žemlička**, 2007,str.1, [Int 16])

V popisu Euklidova algoritmu se vyskytuje prvek z modulární aritmetiky, a tedy zde uvedeme stručné vysvětlení:

„Modulární aritmetika je aritmetikou na množině celých čísel ***Z,*** *v níž se čísla opakují po dosažení určité hodnoty n, jíž nazýváme MODUL.*
Na rozdíl od běžných celočíselných operací se zde po každé operaci provede ještě celočíselné dělení modulem n a výsledkem operace je zbytek po tomto dělení".
(**Přikryl, Vlček**, 2008, str.1, [Int 11])

PŘÍKLAD: Najděte největšího společného dělitele čísel 336, 504.

Řešení:

a) Metoda výběru:

Nejprve vypíšeme všechny možné dělitele čísel 336, 504, 840, označíme společné a vybereme z nich největšího:

336 : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 16, 21, 24, 28, 42, 48, 56, 84, 112, 168, 336
504: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 21, 24, 28, 36, 42, 56, 63, 72, 84, 126,168, 252, 504

Společní dělitelé čísel 336 a 504 tedy jsou: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 12, 14, 21, 24, 28, 42, 56, 84, 168

Největší ze společných dělitelů je číslo 168: **D(336, 504) = 168**

b) Metoda prvočíselného rozkladu

Prvočíselný rozklad:

336 = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$

2	168
2	84
2	42
2	21
7	**3**

504 = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

2	252
2	126
2	63
3	21
3	7

Výběr prvočísel, která se nacházejí ve všech prvočíselných rozkladech čísel 336, 504:

- v našem případě to jsou ta v barevných políčkách, tedy čísla: 2, 2, 2, 3, 7

336 $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$

2	168				
	2	84			
		2	42		
			2	21	
				3	**7**

504 $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

2	252				
	2	126			
		2	63		
			7	9	
				3	**3**

Zjištění největšího společného dělitele čísel 336, 504:

Největšího společného dělitele získáme vynásobením prvočísel zjištěných v předchozím kroku. Zapisujeme:

D(336, 504) = $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

D(336,504) = 168

c) Euklidův algoritmus

Řešení:

Obecně:

$\mathbf{i = 1 : a_0 = q_1 a_1 + a_2}$

$\mathbf{i = 2 : a_1 = q_2 a_2 + a_3}$

Konkrétně:

$504 = 1 \cdot 336 + 168$

$336 = 2 \cdot 168 + 0$

D(336, 504) = 168

2.2.1.2 Nejmenší společný násobek

„SPOLEČNÝM NÁSOBKEM přirozených čísel n_1, n_2, …, n_k nazýváme přirozené číslo, které je násobkem každého z těchto čísel. Ten ze společných násobků, který je menší než libovolný jiný společný násobek, se nazývá NEJMENŠÍ SPOLEČNÝ NÁSOBEK čísel n_1, n_2, …, n_k. Označuje se ***n** $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.“* (**Polák,** 1980, str. 36, [8])

Nechť $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$ pak NEJMENŠÍ SPOLEČNÝ NÁSOBEK těchto čísel je definován: $\mathbf{n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \min\{ n \in N: n_1|n \wedge n_2|n \wedge \ldots \wedge n_k|n\}}$.

Podobně jako u největšího společného dělitele můžeme i při zjišťování nejmenšího společného násobku postupovat různými metodami:

Metoda výběru

Tato metoda je využívána především v počátku seznamování se s nejmenším společným násobkem. Základem je vypsat různé násobky jednotlivých čísel a vybrat ten nejmenší společný.

Metoda prvočíselného rozkladu

Nechť čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$, pak při hledání jejich nejmenšího společného násobku metodou prvočíselného rozkladu postupujeme takto:

a) Nejprve rozložíme čísla $n_1, n_2, \ldots, n_k$, jejichž společný nejmenší násobek hledáme, na součin prvočísel.

b) Z těchto prvočísel vybereme každé v jeho největší mocnině.

c) $\mathbf{n(n_1,n_2,\ldots,n_k)}$ je součin čísel vybraných v kroku b).

(**Polák**, 1980, [8])

Metoda přes největšího společného dělitele

Mezi nejmenším společným násobkem a největším společným dělitelem platí vztah:

$$„\, n(n_1, n_2) = \frac{n_1 \cdot n_2}{D(n_1, n_2)}, \quad kde\ n_1, n_2 \in \mathbf{N}\,“$$

(**Polák**, 1980, str. 36, [8])

PŘÍKLAD: Najděte nejmenší společný násobek čísel 336 a 504.

<u>a) Metoda výběru:</u>

Vypíšeme jednotlivé násobky, vyznačíme ty společné a vybereme nejmenší společný násobek:

336: 336, 672, 1008, 1344, 1680, 2016, 2352, 2688…

504: 504, 1008, 1512, 2016, …

Ze společných násobků vybereme ten nejmenší: 1008< 2016 → Nejmenší společný násobek čísel 336 a 504 je číslo 1008, značíme: **<u>n (336, 504)= 1008</u>**

b) Metoda prvočíselného rozkladu

Obdobně jako u největšího společného dělitele musíme nejprve provést prvočíselný rozklad a označíme čísla v jejich největší mocnině:

336 $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7$

2	168
2	84
2	42
2	21
3	7

504 $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$

2	252
2	126
2	63
7	9
3	**3**

Z prvočíselných rozkladů vybereme čísla v jejich největší mocnině:

2^4; 3^2; 7

n (336, 504) = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$

<u>n (336, 504) = 1008</u>

c) Metoda přes největšího společného dělitele

Největšího společného dělitele čísel 336, 504 jsme spočítali v kapitole 2.2.1.1 str. 27. Stačí tedy jen dosadit do vztahu mezi největším společným dělitelem a nejmenším společným násobkem:

$$n(336,504) = \frac{336 \cdot 504}{D(336,504)} = \frac{169344}{168} = 1008$$

<u>n(336,504) = 1008</u>

<u>Největší společný dělitel a nejmenší společný násobek v příkladech</u>

<u>PŘÍKLAD 1:</u> Tři kamarádi Honza, Kamil a Pepa si našli prázdninovou brigádu jako řidiči v rozvážkové službě. Kamil rozváží větší balíky a vrací se zpět na firmu každou hodinu a půl, Honza rozváží menší balíčky a vrací se na firmu každou druhou hodinu, Pepa rozváží dopisy po okolí tak, že se na firmu vrátí vždy za 1 hodinu 12 minut. Za jak dlouho se všichni kamarádi společně setkají ve firmě?

<u>Řešení:</u>

Musíme najít nejmenší společný násobek daných časových údajů. Pro snadnější počítání si časové údaje převedeme na minuty:

Honza:........... 2 hod = 120 minut

Kamil: .... 1,5 hod = 90 minut

Pepa: .... 1 hod 12 min= 72 min

$120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

$90 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 5 \cdot 3^2$

$72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2$

n(72,90,120)= $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$= 360 min= 6 hod

Odpověď: Všichni tři kamarádi se ve firmě setkají za 360 min. tj. za 6 hodin.

PŘÍKLAD 2: Spisovatel napsal jeden den 32 stránek, druhý den 48 stránek a třetí den 40 stránek své nové knížky. Každý den psal průměrně stejně rychle po celý počet hodin. Kolik stránek průměrně napsal za hodinu?

Řešení:

1. den: .... 32 stránek

2. den: .... 48 stránek

3. den: .... 40 stránek

za hodinu průměrně napsal x stránek

Hledáme největšího společného dělitele čísel 32, 48, 20:

$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5$

$48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3$

$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5$

D(32,40,48) = 2^3 = 8

Odpověď: Spisovatel napsal průměrně za jednu hodinu 8 stránek.

PŘÍKLAD 3: Petr a Pavel si půjčili v knihovně stejnou knížku. Petr přečetl každý den 64 stránek a dočetl ji právě o den později než Pavel, který četl každý den 72 stránek. Kolik stran měla kniha?

Řešení:

Petr: každý den přečetl 64 stránek

počet dní, po které četl knihu …. n + 1

Pavel: každý den přečetl 72 stránek

počet dní, po které četl knihu …. n

Kniha má celkem x stran

Hledáme nejmenší společný násobek čísel 64 a 72:

$72 = 2^3 \cdot 3^2$

$64 = 2^6$

<u>$n(64,72) = 2^6 \cdot 3^2 = 576$</u>

<u>Odpověď</u>: Kniha měla 576 stran.

Tento příklad by bylo možné řešit i pomocí lineární rovnice viz. kapitola 2.2.1.5.1 PŘÍKLAD 3 str. 39.

PŘÍKLAD 4: Vypočítejte: $\dfrac{\dfrac{24}{18}-\dfrac{2}{5}}{\dfrac{8}{16}+\dfrac{5}{6}}+\dfrac{\dfrac{9}{5}\cdot\dfrac{25}{6}}{\dfrac{5}{8}}$

<u>Řešení:</u>

Při krácení zlomků použijeme největší společný dělitel čitatele a jmenovatele zlomku, při převádění zlomků na společného jmenovatele nejmenší společný násobek:

$$\dfrac{\dfrac{24}{18}-\dfrac{2}{5}}{\dfrac{8}{16}+\dfrac{5}{6}}+\dfrac{\dfrac{9}{5}\cdot\dfrac{25}{6}}{\dfrac{5}{8}}=\dfrac{\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{5}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{6}}+\dfrac{\dfrac{15}{2}}{\dfrac{5}{8}}=\dfrac{\dfrac{20-6}{15}}{\dfrac{3+5}{6}}+\dfrac{15}{2}\cdot\dfrac{8}{5}=\dfrac{14}{15}\cdot\dfrac{6}{8}+12=\dfrac{21}{30}+12=$$

$$=\dfrac{21+360}{30}=\dfrac{381}{30}=\dfrac{127}{10}=\underline{\underline{12\dfrac{7}{10}}}$$

PŘÍKLAD 5: Najděte nejmenší společný násobek výrazů $2a^3b^2$, $4a^2b^3$, $(a-b)^2$, a^2-b^2.

<u>Řešení:</u>

Hledání nejmenšího společného násobku různých výrazů se využívá především při sčítání a odčítání lomených výrazů, kdy musíme převést výrazy na společného jmenovatele (viz kapitola 2.2.1.6 Algebraické výrazy, str. 45).

Postup je stejný, jako když hledáme nejmenší společný násobek čísel. Každý z výrazů rozložíme na součin. Vyznačíme výrazy v jejich největší mocnině. Nejmenší společný násobek je pak součin všech výrazů vyskytujících se v součinovém tvaru v největší mocnině. Tedy pro výrazy ze zadání:

$2a^3b^2$ nelze jinak rozložit

$4a^2b^3 = 2^2a^2b^3$

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

<u>$n(2a^3b^2, 4a^2b^3, (a-b)^2, a^2-b^2) = 2^2a^3b^3(a+b)(a-b)^2$</u>

2.2.1.3 Poměr

„Poměr je způsob porovnání dvou údajů. Oba porovnávané údaje musí být ve stejných jednotkách.

Poměr čísel a, b zapisujeme: ***a : b*** *(čti a ku b)“* (**Hájková**, 2010, str. 4, [Int 3])

PŘÍKLAD 1: Čtyři kamarádi si na letní brigádě vydělali peníze v poměru **8 : 7 : 6 : 4**. Součet výdělku prvního a třetího kamaráda byl **4550 Kč**. Kolik korun si vydělal každý z kamarádů? Kolik si vydělali všichni kamarádi dohromady?

Řešení:

Poměr mezi výdělkem 1. a 3. kamaráda je 8 : 6, musíme tedy tímto poměrem rozdělit částku 4550 Kč, tzn. rozdělit ji na 8 + 6 = 14 stejných dílů a tuto dílčí část vynásobit příslušnou hodnotou z poměru u každého kamaráda: 4550 : 14 = 325

1. kamarád: 8 · 325 = 2600 Kč
2. kamarád: 7 · 325 = 2275 Kč
3. kamarád: 6 · 325 = 1950 Kč
4. kamarád: 4 · 325 = 1300 Kč

Celkový výdělek kamarádů: 2600 + 2275 + 1950 + 1300 = **6825 Kč**

Odpověď: Celkový výdělek všech čtyř kamarádů byl 6825 Kč. První si vydělal 2600 Kč, druhý 2275 Kč, třetí 1950 Kč a čtvrtý 1300 Kč.

PŘÍKLAD 2: Pan Hrouda si na mapě s měřítkem **1 : 3500** změřil rozměry svého obdélníkového pole. Naměřené rozměry na mapě jsou **12 cm** a **5 cm**. Určete skutečné rozměry pole a vypočítejte jeho skutečnou výměru v hektarech.

Řešení:

1 cm na mapě odpovídá podle měřítka 3500 cm ve skutečnosti. Skutečné rozměry pole tedy jsou:

12 · 3500 = 42 000 cm = 420 m
5 · 3500 = 17 500 cm = 175 m

Výměru pole spočítáme jako obsah této plochy:

$S = a \cdot b$
$S = 420 \cdot 175$
$S = 73\,500\ m^2$
$S = 7{,}35$ ha

Odpověď: Pole pana Hroudy má rozměry 420 x 175 metrů. Skutečná výměra pole je 7,35 hektarů.

2.2.1.4 Mocniny a odmocniny

Nechť a ϵ **R** a n ϵ **N**, pak součin $a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n$, a je základ mocniny, n je exponent mocniny.

ZÁKLADNÍ VZORCE PRO POČÍTÁNÍ S MOCNINAMI:	
(1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$	Mocniny se stejným základem násobíme tak, že základ umocníme na součet exponentů.
(2) $a^r : a^s = a^{r-s}$, pro $a \neq 0$	Podíl mocnin se stejným nenulovým základem dostaneme, když základ umocníme na rozdíl exponentů.
(3) $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$	Mocninu umocníme, když její základ umocníme na součin exponentů.
(4) $(ab)^r = a^r b^r$	Mocnina součinu je rovna součinu mocnin.
(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$, pro $b \neq 0$	Mocnina podílu je rovna podílu mocnin.
(6) $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$, pro $a \neq 0$	Mocniny se záporným exponentem umocníme tak, že dáme mocninu do jmenovatele a změníme exponent na kladný.
(7)$(-a)^n = a^n$ je sudé přirozené číslo.	Sudá mocnina záporného čísla je rovna téže mocnině z kladného čísla.

(**Polák,** 1980, [8])

POZOR!! $\boxed{(-a)^n \neq -a^n,\ \text{kde } n \in \mathbf{N}}$ $\boxed{a^0 = 1,\ a \in \mathbf{R}}$

Odmocňování je inverzní operace k umocňování.

Nechť a,b ϵ R, a ϵ **N** pak $\sqrt[n]{a} = b$ právě tehdy, když $b^n = a$ ($\sqrt[n]{a}$ čti n-tá odmocnina z a).

([**W5],** 1999)

ZÁKLADNÍ VZORCE PRO POČÍTÁNÍ S ODMOCNINAMI:	
(8)$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, $a \geq 0$, a ϵ **R**	Odmocninu umocníme tak, že umocníme základ a následně spočteme odmocninu.
(9) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $ab \geq 0$	Odmocnina ze součinu je rovna součinu odmocnin.
(10) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $a \geq 0$, $b > 0$, a,b ϵ **R**	Odmocnina z podílu je rovna podílu odmocnin.
(11) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$, $a \geq 0$, a ϵ **R**;	Odmocnina z odmocniny je rovna základu odmocněnému součinem odmocnitelů.
(12) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, $a \geq 0$, aϵ **R**	Odmocnina je rovna umocnění základu na převrácenou hodnotu odmocnitele.

(**Polák**, 1980, [8])

Na základní škole se žáci podle RVP ZV mají setkat povinně s druhou mocninou a odmocninou. Ve školní praxi pak žáci většinou počítají i s vyššími mocninami, vyšší odmocniny jsou pak vykládány jen na minimu škol. Přestože vyšší mocniny a odmocniny nejsou probírány na všech ZŠ, jsou součástí přijímacích a srovnávacích testů pro žáky 9. ročníků (viz SCIO testy a sbírka testů z přijímacích testů na ZŠ).

V zadání příkladů se často setkáme s tím, že se v nich vyskytují různé operace, je proto dobré znát, v jakém pořadí provádíme základní matematické operace:

1) Výpočet a odstranění závorek
2) Provedení umocnění a odmocnění
3) Násobení, dělení
4) Sčítání, odčítání

PŘÍKLAD 1: Vypočítej, jednu osminu z 2^6.

Řešení:

Řešením je zlomek, který má v čitateli 2^6 a ve jmenovateli 8. Číslo 8 lze zapsat ve tvaru mocniny jako 2^3, tím dostáváme podíl dvou mocnin se stejným základem. Můžeme tedy pro zjednodušení použít vztah (2):

$$\frac{2^6}{8} = \frac{2^6}{2^3} = 2^{6-3} = \underline{\underline{2^3}}$$

PŘÍKLAD 2: Vypočítejte: $-3^2 + (-4)^2 - (-3)^2 - 2$

Řešení:

Nejprve umocníme. Pozor – je nutné si uvědomit rozdíl mezi -3^2 a $(-3)^2$. V prvním případě má mocnina přednost před znaménkem –, tedy výsledek bude záporné číslo. V druhém případě umocňujeme závorku, která má přednost před mocninou, proto bude výsledkem kladné číslo.

$$-3^2 + (-4)^2 - (-3)^2 - 2 = -9 + 16 - 9 - 2 = \underline{\underline{-4}}$$

PŘÍKLAD 3: Urči hodnotu číselného výrazu: $\sqrt{16}\cdot\sqrt[3]{8}-\sqrt{9}\cdot\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{64}$

Řešení:

Nejprve přepíšeme základ odmocniny do tvaru mocniny prvočísla, následně odstraníme odmocniny. Pozor – součin má přednost před sčítáním a odčítáním:

$$\sqrt{2^4}\cdot\sqrt[3]{2^3}-\sqrt{3^2}\cdot\sqrt[3]{3^3}+\sqrt[3]{2^6}=2^2\cdot 2-3\cdot 3+2^2=8-9+4=\underline{\underline{3}}$$

V našem řešení jsme předpokládali, že n-tá odmocnina z kladného čísla je opět kladné číslo.

PŘÍKLAD 4: Vypočítejte: $\sqrt{\dfrac{32^2\cdot 32+4\cdot(-32)^2}{(-36)^2\cdot 32^2}}$

Řešení:

Nejprve použijeme pravidla (1), (4) pro počítání s mocninami, vytkneme v čitateli, zkrátíme čitatele se jmenovatelem. Aplikujeme vztah (2), (10) a následně odmocníme:

$$\sqrt{\frac{32^2\cdot 32+4\cdot(-32)^2}{(-36)^2\cdot 32^2}}=\sqrt{\frac{32^3+4\cdot 32^2}{36^2\cdot 32^2}}=\sqrt{\frac{32^2(32+4)}{36^2\cdot 32^2}}=\sqrt{\frac{36}{36^2}}=\sqrt{\frac{1}{36}}=\frac{1}{\sqrt{36}}=\underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

PŘÍKLAD 5: Uspořádejte čísla správně podle velikosti od nejmenšího k největšímu:

$-(-2)^3;\ -3^2;\ (-2)^2;\ \left(-\frac{5}{8}\right)^0;\sqrt{0{,}16};\sqrt{9}$

Řešení:

V prvé řadě provedeme u každého čísla umocnění a odmocnění:

- $-(-2)^3=-(-8)=8$
- $-3^2=-9$
- $(-2)^2=4$
- $\left(-\frac{5}{8}\right)^0=1$
- $\sqrt{0{,}16}=\sqrt{\frac{16}{100}}=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{100}}=\frac{4}{10}=0{,}4$
- $\sqrt{9}=3$

Výsledky seřadíme podle velikosti: $-9<0{,}4<1<3<4<8$

Nyní k výsledkům přiřadíme výrazy ze zadání.

Výsledek: $-3^2<\sqrt{0{,}16}<\left(-\frac{5}{8}\right)^0<\sqrt{9}<(-2)^2<-(-2)^3$

2.2.1.5 Rovnice

Nechť f(x), g (x) jsou funkce definovány na množině **M** ϵ **R** (popřípadě **C**), pak nalezení všech x ϵ **M** odpovídající rovnosti: f(x) = g(x) nazýváme ROVNICÍ S NEZNÁMOU x*;*
f(x) se nazývá levá strana rovnice, g(x) pravá strana rovnice.
Je-li g(x) = 0, je rovnice v tzv. ANULOVANÉM TVARU.
Čísla x ϵ M, která vyhovují dané rovnici, jsou tzv. KOŘENY ROVNICE.

(**Polák**, 1980, [8])

Na základní škole se mlčky předpokládá, že veškeré úlohy se řeší v oboru racionálních čísel, pokud není uvedeno jinak. Tím máme na mysli např. úlohy, které vedou k řešení diofantovské rovnice řešené v oboru celých, příp. přirozených čísel. Stejně tak při řešení dalších rovnic se toto předpokládá. Nicméně např. grafické řešení soustav rovnic může vyústit v nekonečně mnoho řešení v oboru reálných čísel (dvě splývající přímky). Nebude-li uvedeno jinak, předpokládáme v dalším textu řešení rovnic v oboru reálných čísel, což je v souladu s uvedenou charakteristikou (podle **Coufal**, **Klůfa**, 2000, [4])

2.2.1.5.1 Lineární rovnice

Definice:

*„Nechť a_1, a_2, …a_n a b jsou daná reálná čísla ($n \in$ **N** je rovněž dané). Rovnice tvaru:*

$$\boldsymbol{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b}$$

se nazývá LINEÁRNÍ ROVNICE o n NEZNÁMÝCH x_1, x_2, x_3, ….x_n.“

(**Klůfa, Coufal** 2003, str.121, [4])

Na základní škole se ovšem žákům předkládá pouze zjednodušená definice:

Definice:

*„Lineární rovnicí s neznámou x ϵ **R** nazýváme každou rovnici ve tvaru ax + b = 0, kde a ϵ **R** – {0}, b ϵ **R**.*

- *Je-li a ≠ 0 má rovnice ax + b = 0 jediné řešení* $x = -\frac{b}{a}$.
- *Je-li a = 0 a současně b = 0 v rovnici ax + b = 0, má rovnice nekonečně mnoho řešení (každé reálné číslo).*
- *Je-li a = 0 a současně b ≠ 0 v rovnici ax + b = 0, nemá rovnice řešení (množina řešení je prázdná).“*

(**Hudcová, Kubičíková**, 2004, str. 55, [3]) Při řešení lineárních rovnic používáme tzv. **ekvivalentní úpravy**, tj. úpravy, při kterých jsou rovnice původní i rovnice upravené navzájem ekvivalentní. To znamená, že při úpravě žádný kořen ani neubyl, ani nepřibyl. (**Sedláček a kol.,** 1981, [9])

Ekvivalentní úpravy rovnic probírané na základní škole:

1) Roznásobování závorek a vytýkání.

2) Záměna stran rovnice.

3) Přičtení nebo odečtení téhož čísla nebo výrazu s proměnnou k oběma stranám rovnice.

4) Násobení nebo dělení obou stran rovnice číslem nebo nenulovým výrazem s neznámou.

(**Mikulčák**, 1993, [5])

PŘÍKLAD 1: Vyřešte danou rovnici: $3x + 5 - 7x = 2x - 8 - x - 12$

Řešení:

$$3x + 5 - 7x = 2x - 8 - x - 12 \qquad / - 2x + x - 5$$

$$3x - 7x - 2x + x = - 8 - 12 - 5$$

$$-5x = -25 \qquad /: (-5)$$

$$\underline{\underline{x = 5}}$$

Zkouška:

$L(5) = 3 \cdot 5 + 5 - 7 \cdot 5 = 15 + 5 - 35 = -15$

$P(5) = 2 \cdot 5 - 8 - 5 - 12 = 10 - 8 - 5 - 12 = -15$

$\underline{L(5) = P(5)}$

PŘÍKLAD 2: Vyřešte danou rovnici: $3 \cdot (5x - 2) - \frac{x-2}{3} = 8 + 6x$

Řešení:

Roznásobíme závorku: $15x - 6 - \frac{x-2}{3} = 8 + 6x \qquad / \cdot 3$

Vynásobením rovnice společným jmenovatelem, odstraníme zlomky:

$$45x - 18 - (x - 2) = 24 + 18x \qquad / + 18 - 2 - 18x$$

$$45x - x - 18x = 24 + 18 - 2$$

$$26x = 40 \qquad / : 26$$

$$x = \frac{40}{26}$$

$$\underline{\underline{x = 1\frac{7}{13}}}$$

Zkouška:

$$L\left(1\frac{7}{13}\right)=3\cdot\left(5\cdot 1\frac{7}{13}-2\right)-\frac{1\frac{7}{13}-2}{3}=3\cdot\left(\frac{100-26}{13}\right)-\frac{\frac{20-26}{13}}{3}=\frac{222}{13}+\frac{2}{13}=\frac{224}{13}=17\frac{3}{13}$$

$$P\left(1\frac{7}{13}\right)=8+6\cdot 1\frac{7}{13}=8+\frac{120}{13}=\frac{104+120}{13}=\frac{224}{13}=17\frac{3}{13}$$

$$\underline{\underline{L\left(1\frac{7}{13}\right)=P\left(1\frac{7}{13}\right)}}$$

PŘÍKLAD 3:

Petr a Pavel si půjčili v knihovně stejnou knížku. Petr přečetl každý den **64 stránek** a dočetl ji právě o den později než Pavel, který četl každý den **72 stránek**. Kolik stran měla kniha?

Řešení:

Petr: 1 den ...... 64 stránek

Pavel: 1 den....... 72 stránek

n = počet dní, za které přečetl knihu Pavel

n+1 = počet dní, za které přečetl knihu Petr

$$64\cdot(n+1)=72\cdot n$$

$$64n+64=72n \qquad /-64n$$

$$72n-64n=64$$

$$8n=64 \qquad /:8$$

$$\underline{\underline{n=8}}$$

Počet dní · počet stránek přečtených za 1 den = celkový počet stránek knihy

$8\cdot 72=\underline{\underline{576}}$

$9\cdot 64=\underline{\underline{576}}$

Odpověď: Kniha, kterou si Petr s Pavlem půjčili, měla 576 stránek.

2.2.1.5.2 Soustavy lineárních rovnic

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m.$$

je SOUSTAVA m LINEÁRNÍCH ROVNIC O n NEZNÁMÝCH $x_1, x_2, \dots x_n$ (m,n є **N** je dané). Koeficienty u neznámých a_{ij} (i = 1, … , m; j = 1, …, n) a pravé strany rovnic $b_1, \dots, b_m$ jsou daná reálná čísla. Řešením této soustavy rovnic jsou reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$, která vyhovují všem rovnicím soustavy. (**Klůfa, Coufal,** 2000, [4])

Žáci základní školy řeší pouze soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, a proto jsou následující příklady věnovány pouze této problematice a metodám používaným na ZŠ.

Při řešení soustavy lineárních rovnic se žáci mohou setkat se třemi možnostmi výsledku:

1) **Soustava má nekonečně mnoho řešení** – tzn. jedna ze zadaných rovnic je násobkem druhé zadané rovnice.

   Např. rovnice: $2x + 3y = 17$

   $4x + 6y = 34$

   Jedná se o násobek té samé rovnice, získáme tak jednu rovnici pro dvě neznámé. K řešení této rovnice musíme rovnici parametrizovat (parametr se ovšem na základní škole nezavádí). Grafickým řešením získáme dvě splývající přímky.

2) **Soustava nemá řešení** – tzn. levé strany rovnic se rovnají, ale pravé nikoliv. Rovnice vyjadřují dvě rovnoběžky, které se nikdy neprotnou, a tudíž neexistuje řešení.

   Např. rovnice: $2x + 3y = 17$

   $2x + 3y = 14$

3) **Soustava má právě jedno řešení** – tzn. nenastane ani jeden z případů 1),2). Rovnice vyjadřují dvě různoběžky, které mají společný právě jeden bod. (viz příklad 1)

PŘÍKLAD 1: Vyřešte danou soustavu rovnic: (1) $2x + 3y = 17$
(2) $x + 6y = 4$

<u>Řešení:</u>

a) metoda sčítací

Druhou rovnici vynásobíme číslem (– 2), čímž dostaneme soustavu rovnic ve tvaru:

(1) $2x + 3y = 17$

(2) $-2x - 12y = -8$

Nyní sečteme rovnici (1) s rovnicí (2) a dostaneme rovnici o jedné neznámé ve tvaru:

$$3y + (-12y) = 17 + (-8)$$
$$-9y = 9$$
$$\underline{\underline{y = -1}}$$

Neznámou x spočítáme tak, že do jedné ze zadaných rovnic dosadíme spočítané y a vyřešíme lineární rovnici s neznámou x. Dosadíme-li tedy do rovnice (2), dostaneme:

$$x + 6 \cdot (-1) = 4$$
$$x - 6 = 4 \qquad / +6$$
$$\underline{\underline{x = 10}}$$

Zadaná soustava rovnic má tedy řešení $\underline{\underline{\mathbf{[x, y] = [10, -1]}}}$.

b) metoda dosazovací

Tato metoda spočívá v tom, že z jedné z rovnic vyjádříme jednu neznámou a dosadíme ji do zbývající rovnice, čímž dostaneme lineární rovnici o jedné neznámé pro druhou neznámou, kterou můžeme vyřešit. Výsledek opět dosadíme do jedné ze zadaných rovnic a spočítáme i první neznámou.

V našem příkladu je vhodné z rovnice (2) vyjádřit x, neboť se tak vyhneme počítání se zlomky.

$$x + 6y = 4 \qquad / -6y$$
$$x = 4 - 6y$$

x vyjádřené z rovnice (2) dosadíme do rovnice (1):

$$2 \cdot (4 - 6y) + 3y = 17$$
$$8 - 9y = 17 \qquad / +9y - 17$$
$$8 - 17 = 9y$$
$$9y = -9 \qquad / : 9$$
$$\underline{\underline{y = -1}}$$

Spočtenou hodnotu y = – 1 nyní dosadíme do vyjádřeného x z rovnice (2):

$$x = 4 - 6y$$

$$x = 4 - 6 \cdot (-1)$$

$$x = 4 + 6$$

$$\underline{\underline{x = 10}}$$

Použitím metody dosazovací jsme došli ke stejnému řešení dané soustavy rovnic:

$\underline{\underline{[x, y] = [10, -1]}}$.

c) metoda srovnávací

Tato metoda spočívá v tom, že z obou rovnic vyjádříme stejnou libovolnou neznámou. Výrazy takto vzniklé si musí být rovny.

V našem případě si z obou rovnic vyjádříme nejprve například x:

$$(1) \qquad 2x + 3y = 17 \qquad / -3y$$

$$2x = 17 - 3y \qquad /: 2$$

$$x = \frac{17 - 3y}{2}$$

$$(2) \qquad x + 6y = 4 \qquad / -6y$$

$$x = 4 - 6y$$

Musí platit:

$$\frac{17 - 3y}{2} = 4 - 6y \; / \cdot 2$$

$$17 - 3y = 8 - 12y \qquad / +12y - 17$$

$$-3y + 12y = 8 - 17$$

$$9y = -9 \qquad / : 9$$

$$\underline{\underline{y = -1}}$$

Nyní dosadíme získanou hodnotu pro y do jednoho z vyjádření pro x. Zvolíme dosazení do vyjádření z rovnice (2), neboť to již máme rozepsané v metodě dosazovací a nebudeme to zde muset znovu rozepisovat.

Na začátku řešení touto metodou jsme si zvolili, že z obou rovnic vyjádříme x, neboť to bylo z hlediska výpočtů snazší, ovšem ukážeme si, že na volbě z hlediska správnosti nezáleží. Mohli jsme stejně vyjádřit y:

(1)
$$2x + 3y = 17 \qquad / -2x$$
$$3y = 17 - 2x \qquad / : 3$$
$$y = \frac{17 - 2x}{3}$$

(2)
$$x + 6y = 4 \qquad / -x$$
$$6y = 4 - x \qquad /: 6$$
$$y = \frac{4 - x}{6}$$

Opět musí platit, že vyjádření neznámé z rovnice (1) musí být rovno vyjádření z rovnice (2):

$$\frac{17 - 2x}{3} = \frac{4 - x}{6} \qquad / \cdot 6$$
$$2\cdot (17 - 2x) = 4 - x$$
$$34 - 4x = 4 - x \qquad /+ 4x - 4$$
$$-x + 4x = 34 - 4$$
$$3x = 30 \qquad / :3$$
$$\underline{\underline{x = 10}}$$

Dosadím-li x = 10 do jednoho z vyjádření pro y, dostaneme $\underline{\underline{y = -1}}$.

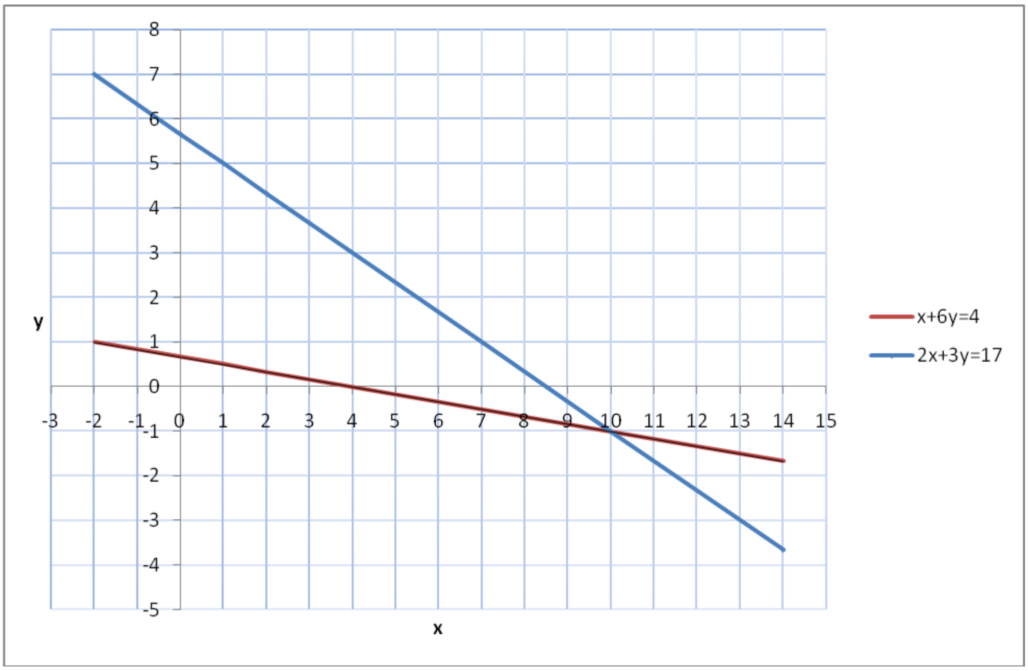
Je tedy jedno, kterou neznámou si vyjádříme z hlediska správnosti řešení, ale leckdy si šikovným výběrem ušetříme spoustu počítání.

Použitím metody srovnávací jsme došli ke stejnému řešení dané soustavy rovnic, a to: x = 10; y = – 1, tedy **[x, y] = [10, – 1].**

d) Metoda grafická

Tato metoda je založena na správném grafickém znázornění zadaných funkcí. Zakreslíme-li do grafu všechny funkce dané soustavou lineárních rovnic, společné body přímek budou řešením zadané soustavy.

Zakreslíme tedy naše funkce do grafu:



Z grafu lze odečíst, že společný bod – průsečík těchto dvou přímek, je

[x, y] = [10, – 1].

Všechny čtyři způsoby řešení lineárních soustav rovnic jsou ekvivalentní, a tak záleží na každém žákovi, kterou si při řešení obdobných soustav zvolí.

PŘÍKLAD 2: Ve třídě 9. A je o 5 chlapců méně než dívek. Pokud by do třídy přišly 4 dívky, bylo by děvčat dvakrát více než chlapců. Kolik je v 9. A žáků?

Řešení:

x .... počet dívek

y .... počet chlapců

z = x + y .... celkový počet žáků ve třídě

Tuto úlohu lze převést na soustavu dvou lineárních rovnic o dvouch neznámých:

I. rovnice: Ve třídě 9. A je o 5 chlapců méně než dívek to znamená: $x - 5 = y$

II. rovnice: Pokud by do třídy přišly 4 dívky, bylo by děvčat dvakrát více než chlapců, to znamená: $x + 4 = 2y$

Máme tedy soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých:

I. $x - 5 = y$
II. $x + 4 = 2y$

K řešení této rovnice můžeme použít libovolnou za čtyř metod uvedených v příkladě 1. Zde rozepíšeme pouze metodu sčítací:

I. rovnici vynásobíme (–1) a sečteme obě rovnice:

$$\begin{array}{lrl} \text{I.} & -x + 5 & = -y \\ \text{II.} & \underline{x + 4} & \underline{= 2y} \\ & 0 + 9 & = y \\ & \underline{\underline{y}} & \underline{\underline{= 9}} \end{array}$$

Dosazením y = 9 do jedné ze zadaných rovnic dopočítáme hodnotu pro neznámou $\underline{\underline{x = 14}}$.

$[x,y] = [14, 9] \rightarrow \quad z = x + y = 14 + 9 = \underline{\underline{23}}$

<u>Odpověď:</u> Ve třídě je 14 dívek a 9 chlapců, tzn. 23 žáků.

2.2.1.6 Algebraické výrazy

Algebraickým výrazem rozumíme zápis, ve kterém se vyskytují KONSTANTY, PROMĚNNÉ a OPERACE prováděné s konstantami a proměnnými.

PROMĚNNOU rozumíme znak, který označuje libovolné číslo z určité množiny, kterou nazýváme OBOR PROMĚNNÉ nebo DEFINIČNÍ OBOR VÝRAZU. Pokud není obor proměnné určen, považujeme za obor proměnné množinu všech čísel, která lze do výrazu dosadit, aniž ztratí smysl některá z uvedených operací (nedochází např. k dělení nulou, odmocňování záporného čísla v reálném výrazu apod.). Dosadíme-li do výrazu za proměnnou konkrétní číslo, dostaneme číslo tzv. HODNOTU VÝRAZU.

Mezi algebraické výrazy patří mnohočleny, racionální lomené výrazy, iracionální výrazy.

(**Martišek**, 2004, [Int 7])

Při úpravě výrazů často využíváme tyto rozkladové vzorce:

(1) $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
(2) $(a – b)^2 = (a – b) \cdot (a – b) = a^2 – 2ab + b^2$
(3) $a^2 – b^2 = (a – b) \cdot (a + b)$
(4) $a^2 + b^2$ nelze rozložit v **R**

Složitějšími případy jsou vzorce pro 3 mocninu:
(5) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
(6) $(a – b)^3 = a^3 – 3a^2b + 3ab^2 – b^3$
(7) $a^3 – b^3 = (a – b) (a^2 + ab + b^2)$
(8) $a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 – ab + b^2)$

(**Hudcová, Kubičíková**, 2004, [3])

Obecně lze n-tou mocninu dvojčlenu vyjádřit pomocí **Binomické věty:**

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

$$(a-b)^n = a^n - \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 - \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} - b^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k}b^k$$

Rozklad dvojčlenu $\mathbf{a^n + b^n}$ na součin :

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1}) = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-(k+1)}b^k$$

Pro liché přirozené n.

Rozklad dvojčlenu $\mathbf{a^n - b^n}$ na součin:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots b^{n-1}) = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-(k+1)}b^k \text{ pro každé } n \in \mathbf{N},\ n > 1.$$

(**Polák**, 1980, [8])

Na základní škole žáci pracují většinou pouze se vztahy (1) - (4) s vyššími mocninami dvojčlenu se setkají až na SŠ.

V příkladech, které se podle sbírek přijímacích testů a internetových stránek středních škol často vyskytují v přijímacích testech, se žáci setkají i se sčítáním, odčítáním a dělením lomených výrazů, proto zde jen stručně uvedeme základní teorii, kterou následně využijeme i v řešených příkladech.

SČÍTÁNÍ: Lomené výrazy se STEJNÝM JMENOVATELEM sečteme tak, že sečteme jejich čitatele a jmenovatele opíšeme.

Lomené výrazy s RŮZNÝMI JMENOVATELI sečteme tak, že výrazy převedeme na společného jmenovatele a takto upravené výrazy sečteme.

ODČÍTÁNÍ: Lomené výrazy se stejným jmenovatelem odečteme tak, že odečteme jejich čitatele a jmenovatel opíšeme.

Lomené výrazy s RŮZNÝMI JMENOVATELI odečteme tak, že výrazy převedeme na společného jmenovatele a takto upravené výrazy odečteme.

NÁSOBENÍ: Lomené výrazy vynásobíme tak, že vynásobíme čitatele s čitatelem a jmenovatele s jmenovatelem.

DĚLENÍ: Výraz vydělíme lomeným výrazem tak, že ho vynásobíme převráceným lomeným výrazem. (Pozor, nesmíme dělit 0).

(**Odvárko, Kadleček**, 2000, [6])

Při úpravě výrazů se často využívá tzv. krácení výrazů.

Výraz vykrátíme, když čitatele i jmenovatele vydělíme stejným nenulovým číslem nebo výrazem.

Tabulka 3

Správně	Špatně	
$\frac{ab^2}{a^2b}=\frac{b}{a}$	$\frac{a}{b}+\frac{b^2}{a^2}\neq\frac{b}{a}$	Nelze krátit. Tyto výrazy musíme převést na společného jmenovatele, sečíst je a následně zjistit, zda jde výsledek krátit.
$\frac{4a+6ab}{2a}=\frac{2a(2+3b)}{2a}=2+3b$	$\frac{4a+6ab}{2a}\neq 2+6ab$	Nelze krátit. Nejprve musíme čitatele převést pomocí vytýkání na součin a následně můžeme krátit.
$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a}{b^2}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{b^2}{a}=b$	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{b}{a}}\neq 1$	Podíl lomených výrazů můžeme převést na součin lomených výrazů, lépe tak uvidíme, co lze s čím krátit.
$\frac{a}{a}=1$	$\frac{a}{a}\neq 0$	V čitateli i jmenovateli si můžeme představit, že tam je „1“· a dostáváme tak: $\frac{1\cdot a}{1\cdot a}=\frac{1}{1}=1\neq 0$

Komentář: *uvedené příklady rozvíjejí dovednosti využívání základních vzorců, krácení, vytýkání, sčítání, odčítání, násobení a dělení výrazů.*

PŘÍKLAD 1: a) Určete, pro která a nemá daný výraz smysl: $\frac{a^2+3a^3}{a^2-1}\cdot\frac{2a+1}{a^3}$

b) Určete, pro která a je tento výraz roven nule.

Řešení:

a) Aby měl daný výraz smysl, nesmí se dělit nulou, tzn. jmenovatel musí být různý od nuly:

$a^2-1\neq 0,\qquad \wedge \qquad a^3\neq 0$, tj. $a\neq 0$

$(a-1)\cdot(a+1)\neq 0$, tj. $a\neq\pm 1$

$a\in R \wedge a\neq\pm 1;\ a\neq 0$

b) Aby byl součin dvou výrazů nulový, musí být alespoň jeden z činitelů roven nule.

Dělit nulou nelze (viz a)), proto musí být roven nule alespoň jeden z čitatelů:

$a^2+3a^3=0$ nebo $2a+1=0$

$a^2\cdot(1+3a)=0$ $\qquad 2a=-1$

$a=0 \vee 1+3a=0$ $\qquad a=-\frac{1}{2}$

$a=-\frac{1}{3}$

Pro a = 0 nemá výraz smysl (ad a)), proto a = 0 není řešením.

Výraz $\frac{a^2+3a^3}{a^2-1}\cdot\frac{2a+1}{a^3}=0$ právě tehdy, když $a=-\frac{1}{3}$ nebo $a=-\frac{1}{2}$.

PŘÍKLAD 2: Určete podmínky, za kterých má daný výraz smysl, a upravte ho:

$$\frac{b}{ab^2}+\frac{a}{a^2b}$$

__**Řešení:**__

Výraz nemá smysl, nachází-li se ve jmenovateli 0, tzn: $ab^2 \neq 0 \quad \Lambda \quad a^2b \neq 0 \quad \Rightarrow \qquad a, b \neq 0$

Daný výraz má smysl pro všechna a,b ≠ 0.

Nyní můžeme přejít k samotnému sčítání výrazů. V prvním kroku musíme výrazy převést na společného jmenovatele. Je vhodné za společného jmenovatele dosadit nejmenší společný násobek obou jmenovatelů, neboť si tak usnadníme výpočty. V druhém kroku sečteme čitatele. V poslední řadě pokrátíme čitatele se jmenovatelem, tzn. vydělíme čitatele i jmenovatele výrazem ab.

$$\frac{b}{ab^2}+\frac{a}{a^2b}=\frac{b\cdot a+a\cdot b}{a^2b^2}=\frac{2ab}{a^2b^2}=\underline{\underline{\frac{2}{ab}}}$$

PŘÍKLAD 3: Určete podmínky, za kterých má daný výraz smysl, a upravte ho.

$$\frac{2}{a+b}+\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{4}{a-b}$$

__**Řešení:**__

Nejprve musíme určit podmínky, za kterých má daný výraz smysl. Aby měl výraz smysl, musí být jmenovatel různý od nuly, tzn. dostáváme tři podmínky:

1) $a+b \neq 0 \qquad / -b$

$a \neq -b$

2) $a^2-b^2 \neq 0$

$(a-b)(a+b) \neq 0$ Tato podmínka obsahuje podmínku 1) a 3).

$a \neq \pm b$

3) $a-b \neq 0$

Daný výraz má smysl pro a,b є **R**; kde a ≠ ±b

Nyní musíme převést všechny tři výrazy na společného jmenovatele. Hledáme tedy nejmenší společný násobek výrazů a + b, a – b, $a^2 - b^2$ a tím je samotný výraz $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ (dle vztahu (3) str. 44). Následně roznásobíme a sečteme čitatele jednotlivých výrazů a opíšeme společného jmenovatele.

$$\frac{2}{a+b}+\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{4}{a-b}=\frac{2(a-b)}{a^2-b^2}+\frac{ab}{a^2-b^2}+\frac{4(a+b)}{a^2-b^2}=\frac{2a-2b+ab+4a+4b}{a^2-b^2}=$$

$$=\underline{\underline{\frac{6a+ab+2b}{a^2-b^2}}}$$

PŘÍKLAD 4: Určete podmínky, za kterých má daný výraz smysl, a upravte ho.

$$\frac{b+1}{2}-\frac{a-b}{a-3}$$

Řešení:

Opět musíme nejprve určit podmínky. V tomto příkladě je jediná podmínka:

$$a-3\neq 0\text{, tj. } a\neq 3$$

Daný výraz má smysl pro všechna reálná $a \neq 3$.

Jedná se o rozdíl dvou lomených výrazů. V prvním kroku je musíme převést na společného jmenovatele (nejmenší společný násobek jednotlivých jmenovatelů). V druhém kroku provedeme roznásobení čitatelů. Ve třetím zjistíme rozdíl čitatelů, čímž dostaneme výsledný výraz.

$$\frac{b+1}{2}-\frac{a-b}{a-3}=\frac{(b+1)(a-3)}{2(a-3)}-\frac{2(a-b)}{2(a-3)}=\frac{ab-3b+a-3}{2(a-3)}-\frac{2a-2b}{2(a-3)}=\underline{\underline{\frac{ab-b+3a-3}{2(a-3)}}}$$

PŘÍKLAD 5: Určete podmínky, za kterých má následující výraz smysl, a upravte ho.

$$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}-\frac{3}{a-b}$$

Řešení:

Nejprve musíme určit podmínky, za kterých má daný výraz smysl.

1) $a\neq 0$

2) $b\neq 0$

3) $a-b\neq 0$, tj. $a\neq b$

Daný výraz má smysl pro $a,b \in$ **R**; $a,b\neq 0 \;\; \Lambda \;\; a\neq b$.

V první řadě musíme převést všechny dílčí výrazy na společného jmenovatele (nejmenší společný násobek jmenovatelů). Následně roznásobíme dílčí čitatele a provedeme součet a rozdíl.

$$\frac{4}{a}+\frac{1}{b}-\frac{3}{a-b}=\frac{4b(a-b)}{ab(a-b)}+\frac{a(a-b)}{ab(a-b)}-\frac{3ab}{ab(a-b)}=\frac{4ab-4b^2+a^2-ab-3ab}{ab(a-b)}=\underline{\underline{\frac{a^2-4b^2}{ab(a-b)}}}$$

PŘÍKLAD 6: Určete podmínky, za kterých má následující výraz smysl, a upravte ho.

$$\frac{ab}{8}\cdot\frac{ab^2}{c}$$

Řešení:

Jedinou podmínkou pro existenci takového výrazu je c ≠ 0.

Daný výraz má tedy smysl pro a, b ϵ **R**; c ϵ **R** Λ c ≠ 0.

Jedná se o součin dvou výrazů, ve kterých nelze nic zkrátit. Vynásobíme tedy čitatele s čitatelem a jmenovatele se jmenovatelem.

$$\frac{ab}{8}\cdot\frac{ab^2}{c}=\underline{\underline{\frac{a^2b^3}{8c}}}$$

PŘÍKLAD 7: Určete podmínky, za kterých má následující výraz smysl, a upravte ho.

$$\frac{a-b}{a+2}\cdot\frac{a+b}{a+2}$$

Řešení:

Pro existenci daného výrazu musí platit podmínka:

$a+2\neq 0$, tj. $\underline{\underline{a\neq -2}}$

Daný výraz má tedy smysl pro a ϵ **R**, a ≠ – 2; b ϵ **R**.

Jedná se o součin dvou lomených výrazů, proto vynásobíme čitatele s čitatelem a jmenovatele se jmenovatelem. V čitateli následně použijeme vzorec (3) a ve jmenovateli vzorec (1).

$$\frac{a-b}{a+2}\cdot\frac{a+b}{a+2}=\frac{(a-b)(a+b)}{(a+2)(a+2)}=\underline{\underline{\frac{a^2-b^2}{(a+2)^2}}}$$

PŘÍKLAD 8: Určete podmínky, za kterých má daný výraz smysl, a upravte ho.

$$\frac{a^3}{a-b}\cdot\frac{8a^2-8b^2}{2a}$$

Řešení:

Nejprve musíme určit podmínky, za kterých má daný výraz smysl. Nesmíme dělit 0, a proto výrazy ve jmenovateli musí být nenulové:

1) $a - b \neq 0$, tj. $a \neq b$

2) $2a \neq 0$, tj. $a \neq 0$

Daný výraz má smysl pro a,b ϵ **R**; $a \neq 0$, $a \neq b$.

Při úpravě nejprve vytkneme číslo 8 z výrazu v čitateli druhého zlomku, použijeme vztah (3) pro rozklad na součin a následně pokrátíme to, co je společné v čitateli i jmenovateli, tedy výrazy 2a, a – b.

$$\frac{a^3}{a-b} \cdot \frac{8a^2 - 8b^2}{2a} = \frac{a^3}{a-b} \cdot \frac{8(a^2 - b^2)}{2a} = \frac{a^3}{a-b} \cdot \frac{8(a-b)(a+b)}{2a} = \underline{\underline{4a^2(a+b)}}$$

PŘÍKLAD 9: Určete, pro která a, b má daný výraz smysl, a upravte ho.

$$\frac{4a^2 - 9b^2}{4a^2 + 12ab + 9b^2} \cdot \frac{2a}{2a - 3b}$$

Řešení:

Nejprve musíme určit podmínky, pro která a, b má daný výraz smysl. Víme, že nelze dělit nulou, tzn. jmenovatelé obou výrazů musí být nenuloví:

1) $4a^2 + 12ab + 9b^2 \neq 0$

Tento výraz lze podle vzorce (1) přepsat:

$$(2a + 3b)^2 \neq 0$$

$$(2a + 3b) \cdot (2a + 3b) \neq 0$$

Tento výraz by byl roven nule právě tehdy, když by byl nulový jeden z činitelů. Oba činitelé jsou stejní, tedy:

$$2a + 3b \neq 0, \text{ tj. } a \neq -\frac{3}{2}b$$

2) $2a - 3b \neq 0$, tj. $a \neq \frac{3}{2}b$

Tedy výraz má smysl pro a,b ϵ **R;** kde $a \neq \pm\frac{3}{2}b$

Při samotném zjednodušení výrazu využijeme nejprve vzorce ((1),(3))pro rozklad mnohočlenů. Následně provedeme krácení výrazy, které se vyskytují v čitateli i jmenovateli tj: (2a – 3b) a (2a + 3b).

$$\frac{4a^2 - 9b^2}{4a^2 + 12ab + 9b^2} \cdot \frac{2a}{2a - 3b} = \frac{(2a-3b)(2a+3b)2a}{(2a+3b)(2a+3b)(2a-3b)} = \underline{\underline{\frac{2a}{2a+3b}}}$$

PŘÍKLAD 10: Určete podmínky, za kterých má daný výraz smysl, a upravte ho:

$$\frac{b+2a}{4a^2b}:\frac{8b+16a}{2a^2b^3}$$

Řešení:

Nejprve musíme opět určit podmínky, za kterých má výraz smysl. Tyto podmínky jsou pro tento výraz 3 a všechny vycházejí z toho, že nelze dělit nulou.

1) $4a^2b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a,b \neq 0$

2) $2a^2b^3 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad a,b \neq 0$

3) $\dfrac{8b+16a}{2a^2b^3} \neq 0$

$$8b+16a \neq 0 \qquad / -16a$$

$$8b \neq -16a \qquad / :8$$

$$\underline{\underline{b \neq -2a}}$$

Daný výraz má smysl pro a,b ϵ **R,** kde a,b ≠ 0 Λ b ≠ –2a.

Jedná se o podíl dvou lomených výrazů, tzn. musíme první výraz vynásobit převrácenou hodnotou druhého výrazu. Před samotným vynásobením je vhodné rozložit dílčí výrazy v čitatelích a jmenovatelích na součin a zkrátit.

$$\frac{b+2a}{4a^2b}:\frac{8b+16a}{2a^2b^3}=\frac{b+2a}{4a^2b}\cdot\frac{2a^2b^3}{8b+16a}=\frac{b+2a}{4a^2b}\cdot\frac{2a^2b^3}{8(b+2a)}=\underline{\underline{\frac{b^2}{16}}}$$

PŘÍKLAD 11: Určete podmínky, za kterých má následující výraz smysl, a upravte ho:

$$\frac{\dfrac{a^2-16}{2a+8}}{\dfrac{4a+16}{2a}}$$

Řešení:

Nejprve musíme opět určit podmínky, za kterých má daný výraz smysl:

1) $2a+8 \neq 0$, tj. $a \neq -4$

2) $2a \neq 0$, tj $\underline{\underline{a \neq 0}}$

3) $\dfrac{4a+16}{2a} \neq 0$

$4a+16 \neq 0$, tj. $\underline{\underline{a \neq -4}}$

Daný výraz má smysl pro a ϵ **R** , kde a ≠ 0, a ≠ – 4.

Jedná se opět o podíl dvou lomených výrazů obdobně jako v příkladě 10, pouze zápis se liší. Nejprve přepíšeme na podíl výrazů tak, abychom odstranili složený zlomek. Následně podíl přepíšeme na součin dvou lomených výrazů. Použijeme rozkladového vzorce (3) a vytýkání k rozkladu na součin, pokrátíme čitatele a jmenovatele a provedeme součin.

$$\frac{\frac{a^2-16}{2a+8}}{\frac{4a+16}{2a}}=\frac{a^2-16}{2a+8}:\frac{4a+16}{2a}=\frac{a^2-16}{2a+8}\cdot\frac{2a}{4a+16}=\frac{(a+4)(a-4)}{2(a+4)}\cdot\frac{2a}{4(a+4)}=\underline{\underline{\frac{a(a-4)}{4(a+4)}}}$$

PŘÍKLAD 12: Určete podmínky, za kterých má následující výraz smysl, a upravte ho.

$$\frac{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{a^2}{a+b}}{\frac{\left(2a+\frac{2a^3}{b^2}\right)}{(a+b)^2}}$$

<u>Řešení:</u>

Musíme určit, pro která a,b má daný výraz smysl:

1) $a^2-b^2 \neq 0$

$(a-b)\cdot(a+b) \neq 0$, tj. $a \neq \pm b$

2) $a+b \neq 0$ Obsaženo v podmínce 1)

3) $b^2 \neq 0$, tj. $b \neq 0$

4) $(a+b)^2 \neq 0$

$(a+b)\cdot(a+b) \neq 0$ Obsaženo v podmínce 1)

5) $\frac{\left(2a+\frac{2a^3}{b^2}\right)}{(a+b)^2} \neq 0$

$\frac{\frac{2ab^2+2a^3}{b^2}}{(a+b)^2} \neq 0$

$b \neq 0$ Obsaženo v podmínce 3)

$a+b \neq 0$ Obsaženo v podmínce 1)

$2ab^2+2a^3 \neq 0$

$2a(b^2+a^2) \neq 0$

$a \neq 0$ a $b^2+a^2 \neq 0$, tj. $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

Sloučením podmínek 1–5 dostáváme, že daný výraz má smysl právě tehdy, když **<u>a,b є R , a,b ≠ 0 Λ a ≠ ±b</u>**.

Po určení podmínek můžeme přejít k samotné úpravě výrazu. Rozložíme dílčí výrazy na součin (pomocí rozkladových vzorců a vytýkání) a sečteme zlomky ve jmenovateli (hledáme nejmenší společný násobek jmenovatelů, tzn. společného jmenovatele). Následně odstraníme složený zlomek (výraz ve jmenovateli převrátíme a vynásobíme s ním čitatele):

$$\frac{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{a^2}{a+b}}{\frac{\left(2a+\frac{2a^3}{b^2}\right)}{(a+b)^2}}=\frac{\frac{a^2\cdot(a^2+b^2)}{(a-b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)}}{\frac{\frac{2ab^2+2a^3}{b^2}}{(a+b)\cdot(a+b)}}=\frac{a^2\cdot(a^2+b^2)}{(a-b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)}\cdot\frac{b^2(a+b)\cdot(a+b)}{2a(b^2+a^2)}=$$

Nyní pokrátíme výrazy společné čitateli i jmenovateli, tzn. a, $a^2 + b^2$, $(a + b)^2$. Provedeme součin:

$$=\frac{a^2\cdot(a^2+b^2)}{(a-b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)}\cdot\frac{b^2(a+b)\cdot(a+b)}{2a(b^2+a^2)}=\frac{ab^2}{2(a-b)}$$

PŘÍKLAD 13: Určete podmínky, za kterých má následující výraz smysl, a upravte ho.

$$\frac{x+\frac{1}{x+2}}{x-\frac{x^3-5x-1}{x^2-4}}$$

Řešení:

Nejprve musíme určit, pro která x má daný výraz smysl, tzv. definiční obor:

Víme, že jmenovatel každého zlomku musí být nenulový, neboť NULOU DĚLIT NELZE!!! Proto:

1) $x + 2 \neq 0$, tj. $x \neq -2$

2) $x^2 - 4 \neq 0$

$(x-2)\cdot(x+2) \neq 0$, tj. $x \neq \pm 2$

3) $$x-\frac{x^3-5x-1}{x^2-4}\neq 0$$

$$\frac{x\cdot(x^2-4)-(x^3-5x-1)}{x^2-4}\neq 0$$

$$\frac{x^3-4x-x^3+5x+1}{x^2-4}\neq 0$$

$$\frac{x+1}{x^2-4}\neq 0,\ \text{tj. } x\neq -1\ \Lambda\ x\neq \pm 2$$

Sloučením podmínek 1,2,3 dostáváme: výraz má smysl pro x ϵ **R,** kde $x \neq -1\ \Lambda\ x \neq \pm 2$.

Po stanovení podmínek můžeme přejít k úpravě výrazu. Provedeme součet v čitateli a rozdíl ve jmenovateli:

$$\frac{x+\frac{1}{x+2}}{x-\frac{x^3-5x-1}{x^2-4}}=\frac{\frac{x\cdot(x+2)+1}{x+2}}{\frac{x\cdot(x^2-4)-(x^3-5x-1)}{x^2-4}}=\frac{\frac{x^2+2x+1}{x+2}}{\frac{x^3-4x-x^3+5x+1}{(x-2)\cdot(x+2)}}=\frac{\frac{(x+1)^2}{x+2}}{\frac{x+1}{(x-2)(x+2)}}=$$

Nyní odstraníme složený zlomek a pokrátíme:

$$=\frac{(x+1)^2}{x+2}\cdot\frac{(x+2)(x-2)}{x+1}=(x+1)(x-2)=x^2-2x+x-2=\underline{\underline{x^2-x-2}}$$

2.2.2 Závislosti, vztahy a práce s daty

V této kapitole jsou zařazena témata, která podle RVP ZV v oblasti Matematika a její aplikace odpovídají tematickému okruhu *Závislosti, vztahy a práce s daty* (viz kapitola 1.1.1.3 str.17) Do tohoto okruhu spadají Závislosti a data, Funkce.

2.2.2.1 Závislosti a data

Aritmetický průměr $\bar{x}$ počítáme podle vzorce:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i'=1}^{n}x_i$$

kde n ϵ **N** je počet prvků, ze kterých počítáme aritmetický průměr. Vzorec můžeme slovně interpretovat: Aritmetický průměr veličiny x se rovná součtu jednotlivých hodnot dělených jejím počtem.

Vyskytuje-li se některá hodnota vícekrát, můžeme použít vztah:

$$\bar{x}=\frac{x_1n_1+x_2n_2+\ldots+x_kn_k}{n},$$

kde x_1, x_2, …,x_k jsou hodnoty znaku a n_1, n_2,…,n_k jsou jejich četnosti.

(**Mikulčák**, 1993, [5])

PŘÍKLAD 1: Žáci 9. A psali souhrnný test z matematiky. Výsledky byly následující: pět žáků dostalo hodnocení 1, šest žáků dostalo hodnocení 2, čtyři žáci dostali hodnocení 3, tři žáci dostali hodnocení 4 a dva žáci dostali hodnocení 5. Jaký byl aritmetický průměr třídy 9. A z tohoto testu?

__Řešení:__

K výpočtu aritmetického průměru využijeme pro jednodušší výpočty vztah:

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n}$$

n...počet všech žáků ve třídě: n = 5 + 6 + 4 + 3 + 2 = **20**

Jednotlivé hodnoty x a jejich četnosti vyčteme ze zadání:

pět žáků dostalo hodnocení 1 $\Rightarrow$ $n_1 = 5; x_1 = 1$

šest žáků dostalo hodnocení 2 $\Rightarrow$ $n_2 = 6; x_2 = 2$

čtyři žáci dostali hodnocení 3 $\Rightarrow$ $n_3 = 4; x_3 = 3$

tři žáci dostali hodnocení 4 $\Rightarrow$ $n_4 = 3; x_4 = 4$

dva žáci dostali hodnocení 5 $\Rightarrow$ $n_5 = 2; x_5 = 5$

Stačí tedy pouze dosadit do vzorce pro $\bar{x}$.

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k}{n} = \frac{1\cdot 5 + 2\cdot 6 + 3\cdot 4 + 4\cdot 3 + 5\cdot 2}{20} = \frac{5+12+12+12+10}{20} = \frac{51}{20} = 2\frac{11}{20}$$

$$\underline{\underline{\bar{x} = 2{,}55}}$$

Kdybychom použili vzorec $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i'=1}^{n} x_i$, došli bychom ke stejnému výsledku:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1+1+1+1+1+2+2+2+2+2+2+3+3+3+3+4+4+4+5+5}{20} = \frac{51}{20}$$

$$\underline{\underline{\bar{x} = 2{,}55}}$$

__Odpověď:__ Aritmetický průměr třídy 9. A z tohoto testu byl 2,55.

PŘÍKLAD 2: V tabulce jsou uvedené údaje o účastnících letního tábora v roce 2011:

	Počet dětí	Počet dětí v procentech	Počet dívek	Počet chlapců
celkový počet	358	100	201	
1. oddíl	30			14
2. oddíl			14	13
3. oddíl		8,94	21	11
4. oddíl	29			17
5. oddíl	25			10
6. oddíl	35		22	
7. oddíl		8,1	18	
8. oddíl		8,67	19	
9. oddíl	33		17	
10. oddíl		9,22		13
11. oddíl	32			16
12. oddíl	22			11

a) Doplňte tabulku (procenta zaokrouhlete na dvě desetinná místa, zaokrouhlení zohledněte ve výpočtech)
b) Kolik dětí bylo průměrně v jednom táborovém oddíle?
c) Kolik procent dětí z 8. oddílu tvoří chlapci a kolik procent dívky?

Řešení:

a) Nejprve doplníme kolonky, kde je možné využít: Počet dívek + počet chlapců = počet dětí

U 1.,2., 4., 5., 6., 9., 11. a 12. oddílu použijeme k výpočtu počtu dětí v procentech trojčlenku:

Obecně: **Konkrétně pro 1. oddíl**:

Celkový počet dětí … 100% 358 ……100%

Počet dětí v oddíle …. x % 30………x

$$x = \frac{100 \cdot \text{pocet deti}}{\text{celk.poc.deti}} \qquad x = \frac{100 \cdot 30}{358} = 8{,}38$$

Čtvrtý a sedmý oddíl mají stejné procentuální zastoupení z celkového počtu dětí, tzn. musí mít stejný počet dětí. Totéž platí i pro devátý a desátý oddíl.

Pro výpočet počtu dětí v osmém oddíle opět využijeme trojčlenku:

258 dětí ……... 100%

x dětí ……..... 8,67%

$$x = \frac{8{,}67 \cdot 358}{100} \approx 31 \text{ dětí}$$

K doplnění tabulky nyní opět využijeme: Počet dívek + počet chlapců = počet dětí

	Počet dětí	**Počet dětí v procentech**	**Počet dívek**	**Počet chlapců**
celkový počet	358	100	201	157
1. oddíl	30	8,38	16	14
2. oddíl	27	7,54	14	13
3. oddíl	32	8,94	21	11
4. oddíl	29	8,1	12	17
5. oddíl	25	6,98	15	10
6. oddíl	35	9,78	22	13
7. oddíl	29	8,1	18	11
8. oddíl	31	8,67	19	12
9. oddíl	33	9,22	17	16
10. oddíl	33	9,22	20	13
11. oddíl	32	8,94	16	16
12. oddíl	22	6,15	11	11

b) Průměrně v jednom táborovém oddíle bylo 358 : 12 = 29,83 $\approx$ 30 dětí

c) V osmém oddílu je 31 dětí, z toho 19 dívek a 12 chlapců. K výpočtu procentuálního zastoupení chlapců a dívek opět použijeme trojčlenku:

Dívek:

31 dětí ....100 %

19 dívek…. .x %

$$x = \frac{19 \cdot 100}{31} = \frac{1900}{31} = \underline{\underline{61{,}29\%}}$$

Chlapců:

100% – 61,29% = $\underline{\underline{38{,}71\%}}$

Odpověď: V osmém oddílu je 61,29% dívek a 38,71% chlapců.

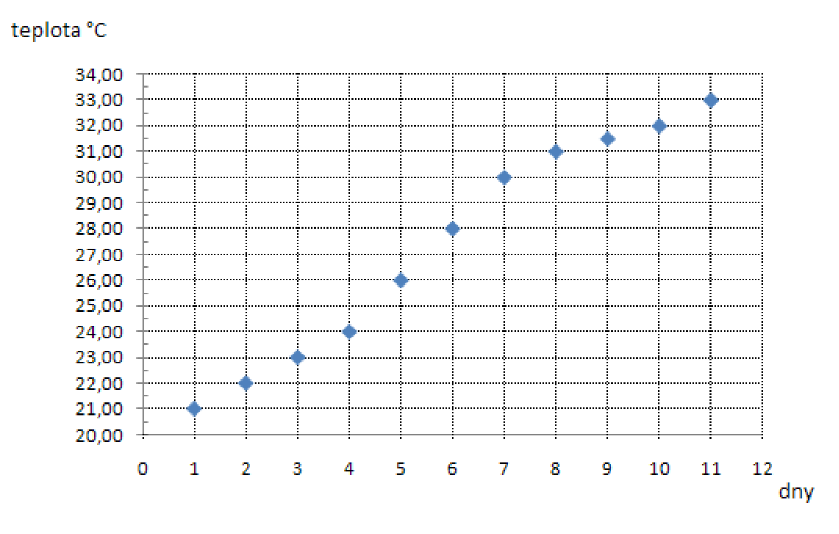
PŘÍKLAD 3: Pan Novák na své domácí meteorologické stanici měřil na přelomu května a června po dobu jedenácti dnů vždy ve dvanáct hodin denní teploty. Hodnoty si poznamenával do grafu.

a) Jaký je rozdíl mezi nejnižší a nejvyšší teplotou?

b) Jaká je průměrná teplota v těchto jedenácti dnech?

c) Jaký je největší teplotní rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími dny?

d) Jaký je nejmenší teplotní rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími dny?



Řešení:

a) Nejnižší teplota byla naměřená první den: 21°C

Nejvyšší teplota byla naměřená poslední den: 33°C

Rozdíl těchto teplot je: 33°C – 21°C = 12 °C

Odpověď: Rozdíl mezi nejvyšší a nejnižší teplotou je 12 °C.

b) Odečteme jednotlivé teploty z grafu a zapíšeme je do tabulky:

dny	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
°C	21	22	23	24	26	28	30	31	31,5	32	33

Nyní spočteme průměrnou teplotu:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{21+22+23+24+26+28+30+31+31{,}5+32+33}{11} = \frac{301{,}5}{11}$$

$\bar{x} = 27{,}4°C$

Odpověď: Průměrná teplota v těchto jedenácti dnech byla 27,4°C.

c) Z grafu můžeme vyčíst, že největší teplotní rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími dny je 2°C a to mezi dnem čtvrtým a pátým, pátým a šestým, šestým a sedmým.

d) Z grafu můžeme vyčíst, že nejmenší teplotní rozdíl mezi dvěma po sobě jdoucími dny je 0,5°C a to mezi dnem osmým a devátým, devátým a desátým.

2.2.2.2 Funkce

„Nechť ***D*** $\subset$ ***R****. Zobrazení f :* ***D*** $\rightarrow$ ***R****, které každému prvku množiny* ***D*** *přiřadí právě jedno číslo z množiny* ***R****, nazýváme reálnou funkcí jedné reálné proměnné.*“

(**Výrut**, 2008, str.1, [Int 14])

Množinu **D** nazýváme DEFINIČNÍ OBOR D(f) a její prvky x ϵ **D** VZORY či NEZÁVISLE PROMĚNNÉ, obrazy vzorů nazýváme FUNKČNÍ HODNOTY f(x). Množina všech funkčních hodnot je tzv. OBOR HODNOT H(f).

(**Výrut**, 2008, [Int 14])

*„**Graf** funkce f je množina uspořádaných dvojic* ***G*** *= {[x; f(x)]; x ϵ* ***D****}“*

(**Výrut**, 2008, str.1, [Int 14])

Do **definičního oboru** spadají všechna x, ve kterých je daná funkce definována. Není-li definiční obor funkce zadán a nevyskytuje-li se v předpisu žádná podmínka omezující D(f) (odmocniny, logaritmy, zlomky atd.), je definičním oborem této funkce množina reálných čísel.

Obor hodnot je množina všech y ϵ **R**, ke kterým existuje x ϵ **R** tak, že [x,y] ϵ f.

(**Hudcová, Kubičíková**, 2004, [3])

Při řešení příkladů týkajících se funkcí je nutné znát definiční obor funkce a vždy kontrolovat, zda výsledné hodnoty opravdu patří do D(f).

Posloupnost je funkce jejíž D(p) = **N**. (**Havrlant**,2006, [Int 5])

Nechť **A** je množina. Řekneme, že $\{a_n\}$ je posloupnost obsažená v množině **A**, jestliže $\{a_n\}$ je zobrazení, kde definiční obor posloupnosti jsou přirozená čísla a obor hodnot je podmnožinou množiny **A**: $\{a_n\}: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{A}$

(**Klůfa, Coufal,** 2003, [4])

Na základní škole se žáci se podle RVP ZV setkají pouze s funkcí lineární. Proto se nadále budeme věnovat převážně této problematice.

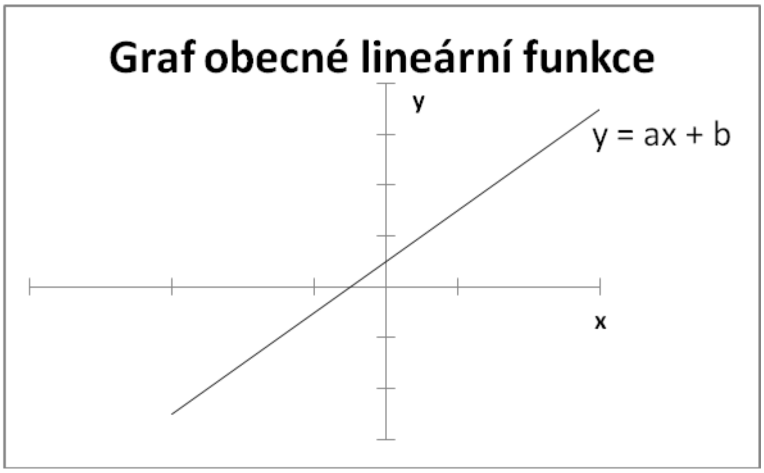
Lineární funkce je každá funkce f daná předpisem f: y = ax + b, kde a, b jsou reálné koeficienty.

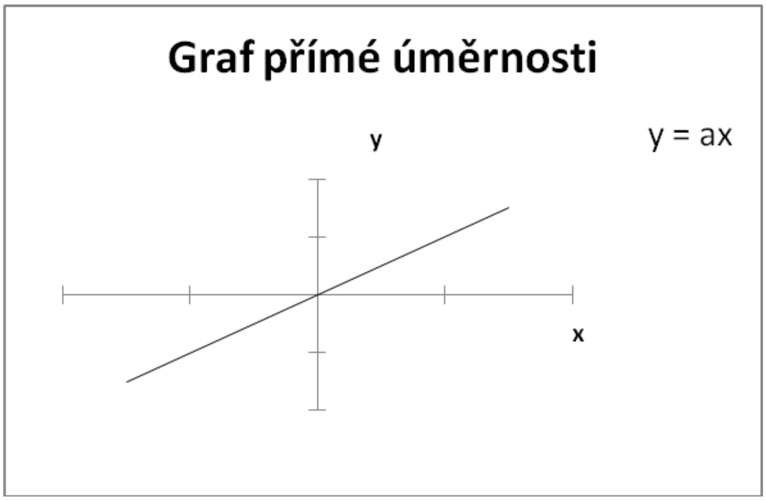
Je-li b = 0, pak funkce f má tvar: f: y = ax. Této speciální lineární funkci říkáme PŘÍMÁ ÚMĚRA.

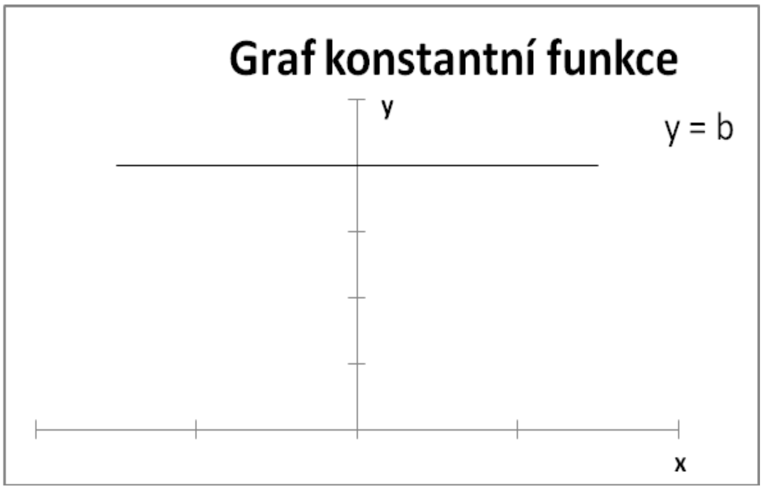
Je-li a = 0, pak funkce f má tvar f: y = b a jedná se o tzv. KONSTANTNÍ FUNKCI.

Grafem lineární funkce je přímka. (**Havrlant**, 2006, [Int 4])

Přestože se na základních školách reálná čísla jako taková nezavádějí, při řešení funkcí se mlčky považují za definiční obor.





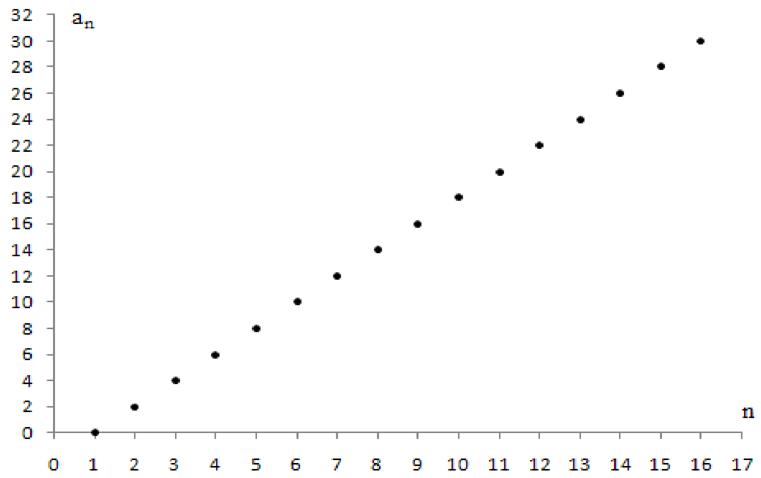


PŘÍKLAD 1: Načrtněte graf zadané posloupnosti: $a_n = 2n - 2$.

Řešení:

Definiční obor zadané posloupnosti je **N,** grafem tedy nebude přímka, ale množina izolovaných bodů. Jednotlivé souřadnice musíme dopočítat:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a_n	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30



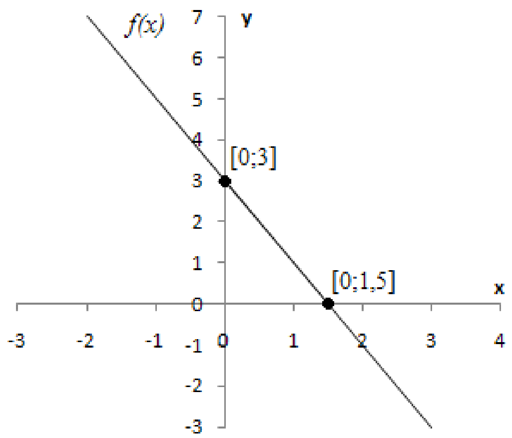
PŘÍKLAD 2: Načrtněte graf funkce f, která je zadána předpisem: $f(x) = -2x + 3$, D(f)= **R**

Řešení:

Jedná se o lineární funkci. K nakreslení grafu lineární funkce potřebujeme znát minimálně dva její body. Spočteme tedy např. její průsečíky s osami:

x	0	1,5
y	3	0

Tyto body zakreslíme do grafu a proložíme jimi přímku:



PŘÍKLAD 3: Načrtněte graf funkce g, která je zadána předpisem: g(x) = $-\frac{2}{3}x+\frac{11}{3}$;

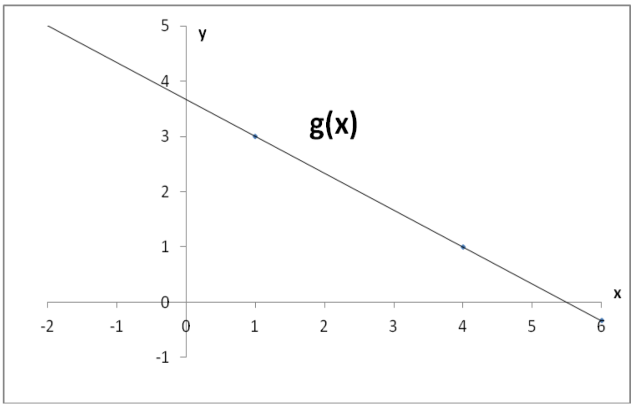
D(g) = **R.**

Řešení:

Pro nakreslení grafu lineární funkce musíme znát minimálně dva její body, například:

x	1	4
y	3	1

Nyní zakreslíme tyto body do pravoúhlé soustavy souřadnic a proložíme je přímkou:



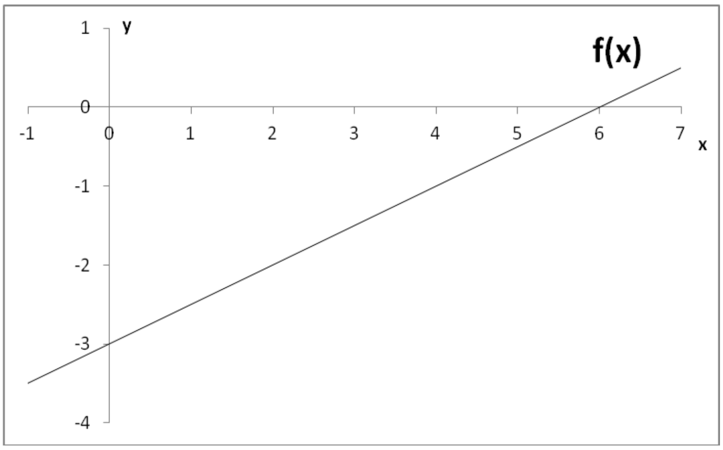
PŘÍKLAD 4: Načrtněte graf funkce f dané předpisem: $f(x)=\frac{1}{2}x-3$; D(f) = **R**.

Řešení:

Jedná se opět o lineární funkci, pro jejíž nakreslení musíme znát alespoň dva její body.

x	0	6
y	– 3	0

Grafem bude podle definičního oboru přímka, procházející oběma body:



PŘÍKLAD 5: Určete graficky i početně průsečík **P** funkcí: f(x) = 3x – 5; D(f) = **R**

g(x) = – 6x + 4; D(g) = **R**

Řešení:

a) Tabulková metoda

Vytvoříme si tabulky, kde do prvního řádku vypíšeme několik libovolných hodnot x a do druhého odpovídající hodnoty y:

f(x) = 3x – 5						
x	– 2	– 1	0	1	2	3
y	– 11	– 8	– 5	– 2	1	4

g(x) = – 6x + 4						
x	– 2	– 1	0	1	2	3
y	16	10	4	– 2	– 8	– 14

Průsečík grafů dvou funkcí je bod společný oběma funkcím. Z našich tabulek tedy vidíme, že společným bodem je bod P = [1; –2]. Tuto metodu je vhodné použít pouze pro pochopení problematiky, v obtížnějších příkladech bychom se jen stěží dobrali výsledku, neboť průsečík nemusí mít celočíselné souřadnice.

b) Metoda výpočtu

Společný průsečík je bod odpovídající předpisům obou funkcí:

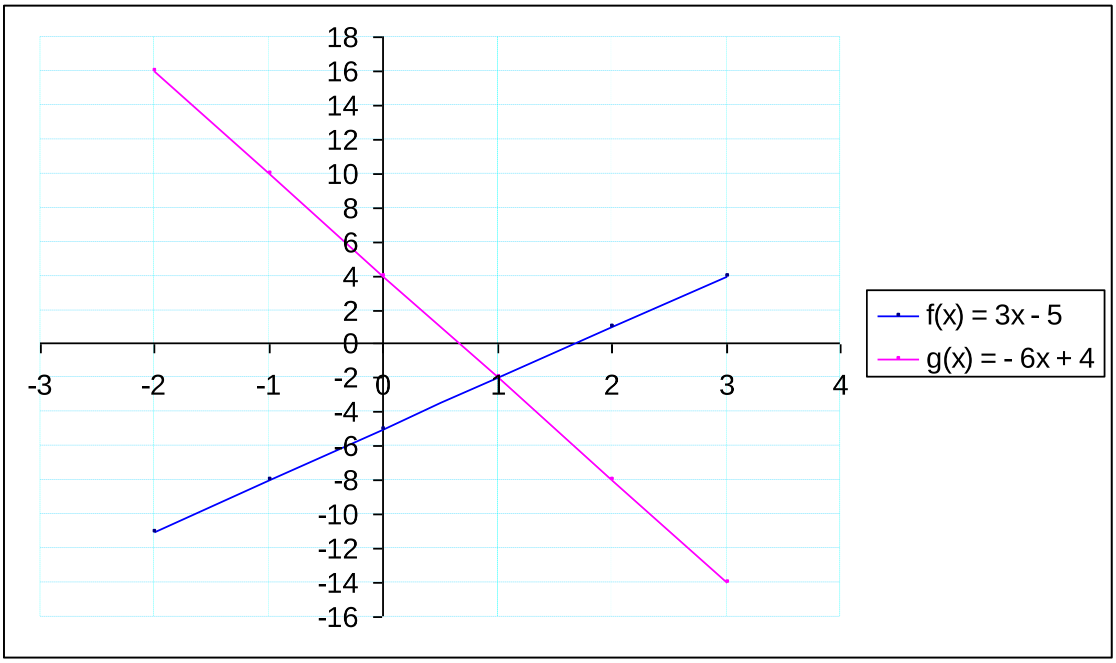
$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x) \\
3x - 5 &= -6x + 4 \quad / + 6x + 5 \\
3x + 6x &= 4 + 5 \\
9x &= 9 \\
\underline{\underline{x}} &\underline{\underline{= 1}}
\end{aligned}
$$

Nyní stačí dopočítat funkční hodnotu v bodě x = 1, tzn. dosadit x = 1 do předpisu pro funkci f(x) nebo g(x). Nezáleží na tom, z kterého předpisu budeme funkční hodnotu počítat, neboť se jedná o společný bod obou funkcí, tudíž výsledek bude stejný.

Dosazením dostáváme: $\underline{\underline{y = -2}}$ → **P = [1; – 2]**

c) Grafická metoda

Při této metodě zakreslíme grafy obou funkcí a následně odečteme souřadnice společného průsečíku. Nevýhodou je, že pokud graf nevykreslujeme elektronicky či velmi přesně nerýsujeme, dochází k nepřesnosti řešení.



I touto metodou jsme došli ke stejnému průsečíku **P = [1;–2].**

<u>Komentář</u>: Následující příklad není díky omezeným definičním oborům příkladem probíraným na ZŠ. Příklad je zařazen, aby žáci mohli vidět, jak definiční obory funkcí ovlivní hledání společného bodu. Grafem funkcí mohou být také rovnoběžky.

PŘÍKLAD 6: Určete graficky i početně průsečík grafů funkcí:

$f(x) = -2x + 1;\ D(f) = \langle -5;3 \rangle;$

$g(x) = 3x - 9;\ D(g) = (-6;\ 1)$

<u>Řešení:</u>

Společný průsečík je bod odpovídající předpisům obou funkcí:

$$-2x + 1 = 3x - 9 \qquad / + 2x + 9$$

$$3x + 2x = 1 + 9$$

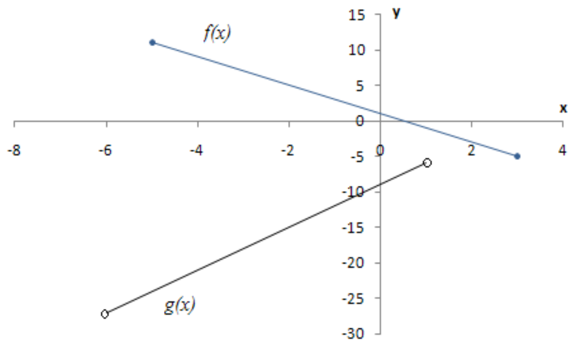
$$5x = 10 \qquad /: 5$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

Nyní stačí dopočítat funkční hodnotu v bodě 2, tzn. dosadit x = 2 do předpisu pro funkci f(x) nebo g(x). Dosazením dostáváme $\underline{\underline{y = -3}}$.

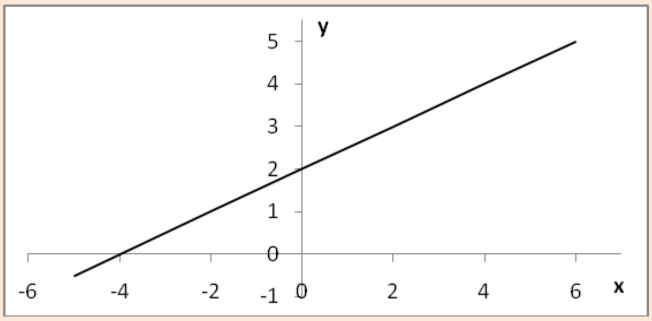
Z našich výpočtů vyplývá, že průsečík by měl být bod o souřadnicích [2; – 3]. Tento bod nepatří do D(g) $\Rightarrow$ **<u>grafy funkcí f(x) a g(x) nemají společný průsečík.</u>**

Náš výsledek si můžeme ověřit graficky:



Grafy funkcí f(x) a g(x) se neprotínají tzn. **f(x) a g(x) nemají společný bod**.

PŘÍKLAD 7: Napište předpis funkce, jejíž graf je na obrázku a určete její definiční obor.



Řešení:

Grafem je přímka, jedná se tedy o lineární funkci, která má obecný předpis y = ax + b a jejíž definiční obor jsou reálná čísla: D(f) = **R**. Z grafu můžeme vyčíst souřadnice některých bodů funkce např. průsečíky s osami mají souřadnice [–4; 0]; [0; 2]. Dosazením souřadnic těchto bodů do obecného předpisu pro lineární funkci dostáváme soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých, které jsme řešili v kapitole 2.2.1.5.2 str. 40 :

$$y = ax + b$$

I. $2 = 0a + b$

II. $0 = -4a + b$

Z rovnice I. dostáváme b = 2. Dosazením b = 2 do rovnice II. spočítáme a.

$$0 = -4a + 2 \qquad / + 4a$$

$$4a = 2 \qquad / : 4$$

$$a = \frac{1}{2}$$

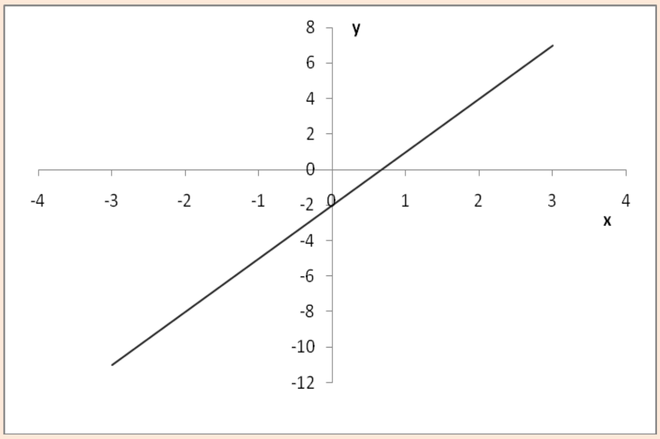
Konkrétní hodnoty a, b dosadíme do obecné lineární rovnice, čímž zjistíme předpis pro funkci graficky znázorněnou v zadání.

$$y = ax + b$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

PŘÍKLAD 8: Který z následujících bodů neleží na grafu zobrazené funkce:

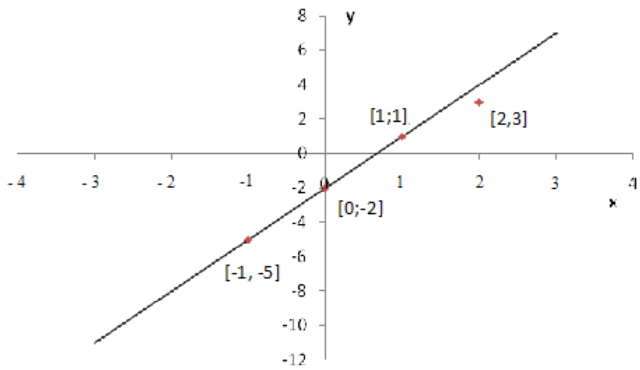
[– 1; – 5], [0; – 2], [1; 1], [2; 3].



Řešení:

a) Grafické řešení

Toto řešení spočívá v tom, že dané body do grafu zakreslíme. Pouhým okem pak z grafu vyčteme, který bod náleží grafu funkce:



Odpověď: Na grafu funkce neleží bod [2; 3].

b) Metoda výpočtu

Při této metodě potřebujeme znát předpis funkce. V příkladě sedm jsme ukázali, jak takový předpis můžeme získat z grafu:

Zvolme dva libovolné body funkce (z obrázku): [0; – 2];[–2; – 8]

Dosazením těchto bodů do obecného předpisu pro lineární funkci y = ax + b dostáváme soustavu dvou lineárních rovnic o 2 neznámých:

I. $-2 = 0a + b \Rightarrow \underline{\underline{b = -2}}$

II. $-8 = -2a + b \Rightarrow \underline{\underline{a = 3}}$

Předpis funkce z obrázku pak je: **y = 3x – 2**

Dosazením zadaných bodů do naleznutého předpisu zjistíme, který z bodů neleží v grafu funkce. Musí platit L[x;y]=P[x;y]:

[– 1; – 5]: L[– 1; – 5] = **– 5**

P[– 1; – 5] = 3·(– 1) – 2 = **– 5**

L[– 1; – 5] = P[– 1; – 5] ⇒ bod [–1; –5] leží na grafu zadané funkce.

[0; - 2]: Z grafu je vidět, že tento bod leží na grafu funkce. Použili jsme ho pro výpočet předpisu funkce.

[1; 1]: L[1; 1]=**1**

P[1; 1]=3 · 1 – 2 = **1**

L[1; 1]=P[1; 1] ⇒ bod [1; 1] leží na grafu zadané funkce

[2; 3]: L [2; 3]=3

P [2; 3]= 3·2 – 2 = 4

L [2; 3] ≠ P [2; 3] ⇒ bod **[2; 3]** neleží na grafu zadané funkce

2.2.3 Geometrie v rovině a v prostoru

V této kapitole jsou zařazena témata, která odpovídají podle RVP ZV v oblasti Matematika a její aplikace tématickému okruhu *Geometrie v rovině a v prostoru* (viz. kapitola 1.1.1.3 str. 17) Do tohoto okruhu spadají Obvody a obsahy geometrických útvarů, Podobnost geometrických útvarů, Úhly, Objemy a povrchy těles.

2.2.3.1 Obvody a obsahy

„Obvod je hraniční křivka rovinného útvaru nebo řezu tělesem a jejich délka.“

Značí se *o* a jeho základní jednotkou je metr *m*. ([**W3]**, 1999)

„Obsah je fyzikální veličina, která vyjadřuje velikost plochy. Jiné názvy jsou plocha, výměra, rozloha.

Obsah je mírou (tedy charakteristikou velikosti) dané dvourozměrné části prostoru. Označuje se písmenem S.“

Základní jednotkou obsahu je m^2 (čti metr čtvereční). ([**W4],** 1999)

VZORCE PRO VÝPOČET OBVODŮ A OBSAHŮ ZÁKLADNÍCH GEOMETRICKÝCH ÚTVARŮ		
Rovinný obrazec	**Obvod**	**Obsah**
Čtverec	$o = 4a$	$S = a^2$
Obdélník	$o = 2 \cdot (a + b)$	$S = ab$
Trojúhelník	$o = a + b + c$	$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{bv_b}{2} = \frac{cv_c}{2}$
Kosočtverec	$o = 4a$	$S = a \cdot v = \frac{u_1 u_2}{2}$
Kosodélník	$o = 2(a + b)$	$S = av_a = bv_b$
Lichoběžník	$o = a + b + c + d$	$S = \frac{(a + c)v}{2}$
Kružnice, kruh	$o = 2\pi r$	$S = \pi r^2$

(**Běloun a kol.**, 1983, [1])

PŘÍKLAD 1: Zahrada Pana Zahálky má tvar obdélníka. Jeho délka je 3x větší než jeho šířka. Šířka měří 7 metrů. Kolik korun stála barva na natření plotu kolem celé zahrady, vystačí- li jedna plechovka barvy za 59 Kč na natření 14 metrů plotu?

Řešení:

šířka .... 7 m

délka.............. 3 x šířka= 3·7= 21 m

Nejprve spočítáme obvod obdélníkového pozemku:

$$o = 2 \cdot (a + b)$$

$$o = 2 \cdot (7+21)$$

$$\underline{o = 56\ \text{m}}$$

Nyní spočítáme, kolik plechovek barvy musíme koupit, abychom natřeli celý plot:

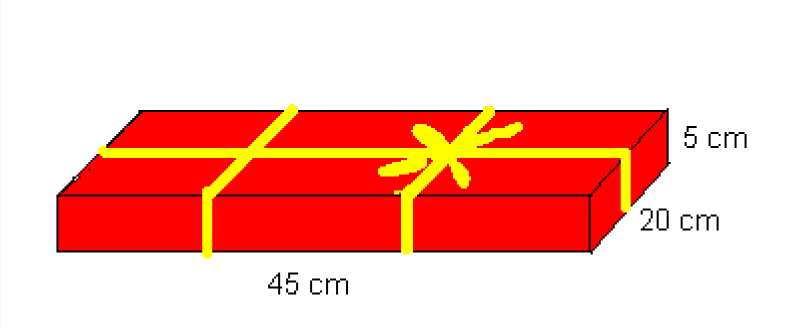
$$56 : 14 = 4$$

Stojí-li jedna plechovka barvy 59 Kč, pak za čtyři plechovky zaplatíme:

$$4 \cdot 59 = \underline{236\ \text{Kč}}$$

Odpověď: Barva na natření plotu kolem celé zahrady stála 236 Kč.

PŘÍKLAD 2: Anička chce zabalit dárek pro maminku. Kolik centimetrů ozdobné stuhy bude Anička potřebovat k obvázání balíčku, jehož rozměry jsou na obrázku? Na uzel a mašli spotřebuje 20 cm.



(**SCIO**, 2004, [Int 12])

Řešení:

Balíček má tvar kvádru o rozměrech:

a = 45 cm

b = 20 cm

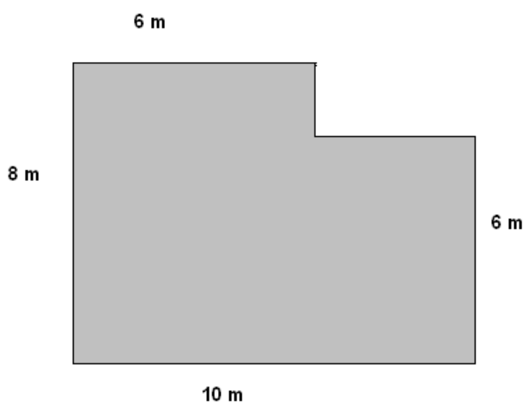
c = 5 cm

Stuha, podle obrázku, tento kvádr obepíná 1x podélně a 2x příčně. Délka stuhy l tak bude rovna součtu obvodu obdélníka se stranami a, c, dvojnásobku obvodu obdélníka se stranami b, c a 20 cm potřebných na uzel a mašli:

$$l = 2 \cdot (a + c) + 2 \cdot 2 \cdot (b + c) + 20$$
$$l = 2 \cdot (45 + 5) + 4 \cdot (20 + 5) + 20$$
$$l = 2 \cdot 50 + 4 \cdot 25 + 20$$
$$\underline{\underline{l = 220 \text{ cm}}}$$

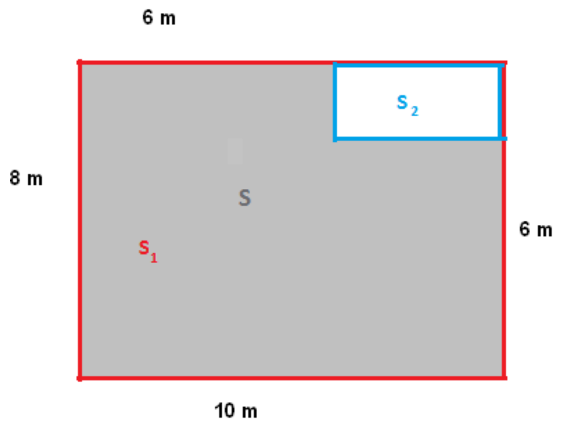
Odpověď: Anička bude potřebovat na zabalení dárku pro maminku 220 cm stuhy.

PŘÍKLAD 3: Pan Koukal si chce vydláždit dvoreček, jehož tvar a rozměry jsou na obrázku. Kolik čtvercových dlaždic se stranou dlouhou 40 cm bude potřebovat?



Řešení:

Existuje více metod pro řešení. Použijeme tu, kde nejprve spočítáme obsah obdélníka S_1 s délkou 10 m a šířkou 8 m a následně od něj odečteme obsah „vyříznuté“ části S_2. Takto získáme obsah plochy dvorečku S:



$$\mathbf{S = S_1 - S_2}$$

Obsah obdélníka obecně spočteme jako: $S = a \cdot b$, kde a je délka obdélníka, b je šířka obdélníka.

$$S_1 = 10 \cdot 8$$
$$S_1 = 80 \text{ m}^2$$

Délku stran vyříznutého obdélníka můžeme vypočítat z obrázku. Délka bude 4 m a šířka 2 m.

$$S_2 = 4 \cdot 2$$
$$S_2 = 8 \text{ m}^2$$

Hodnotu pro S_1 a S_2 dosadíme do vztahu pro S a dostaneme obsah plochy dvorku:

$$S = 80 - 8$$
$$S = 72 \text{ m}^2$$

Obsah jedné čtvercové dlaždice se stranou a = 40 cm je:

$$S_3 = a^2$$
$$S_3 = 40^2$$
$$S_3 = 1600 \text{ cm}^2 = 0{,}16 \text{ m}^2$$

Počet potřebných dlaždic s obsahem 0,16 m^2 je potřeba k vydláždění dvorečku o obsahu 72 m^2:

$$72 : 0{,}16 = \underline{\underline{450}}$$

Odpověď: Pan Koukal bude k vydláždění svého dvorečku potřebovat 450 čtvercových dlaždic s délkou strany 40 cm.

PŘÍKLAD 4: Jsou dány dvě soustředné kružnice. Průměr té větší je 18 cm. Urči poloměr menší kružnice, je-li obsah mezikruží roven 14130 mm^2. ($\pi = 3{,}14$)

Řešení:

S .... obsah mezikruží

S_1........................ obsah větší kružnice

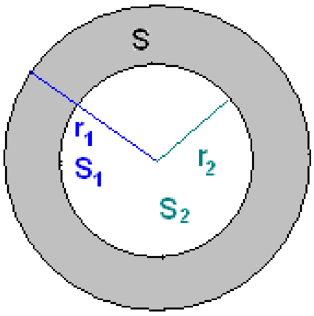
r_1........................ poloměr větší kružnice

S_2........................ obsah vnitřní kružnice

r_2........................ poloměr vnitřní kružnice

$d_1 = 18 \text{ cm} \rightarrow r_1 = 9 \text{ cm}$

$S = 14130 \text{ mm}^2 = 141{,}3 \text{ cm}^2$



Pro výpočet poloměru r_1 musíme znát obsah vepsané kružnice. Mezi obsahy platí:

$$\mathbf{S_1 - S = S_2}$$

Obsah kruhu obecně spočítáme jako $S = \pi r^2$. Proto**:**

$$S_1 = \pi r_1^2$$

$$S_1 = 3{,}14 \cdot 9^2$$

$$\underline{\underline{S_1 = 254{,}34 \text{ cm}^2}}$$

Obsah vnitřního kruhu S_2 je tedy:

$$S_2 = S_1 - S$$

$$S_2 = 254{,}34 - 141{,}3$$

$$\underline{\underline{S_2 = 113{,}04 \text{ cm}^2}}$$

Pro obsah vnitřního kruhu platí:

$$S_2 = \pi r_2^2 \qquad / : \pi$$

$$r_2^2 = \frac{S_2}{\pi} \qquad / \sqrt{\ }$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{S_2}{\pi}}$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{113{,}04}{3{,}14}}$$

$$\underline{\underline{r_2 = 6 \text{ cm}}}$$

Odpověď: Poloměr kružnice vepsané je 6 cm.

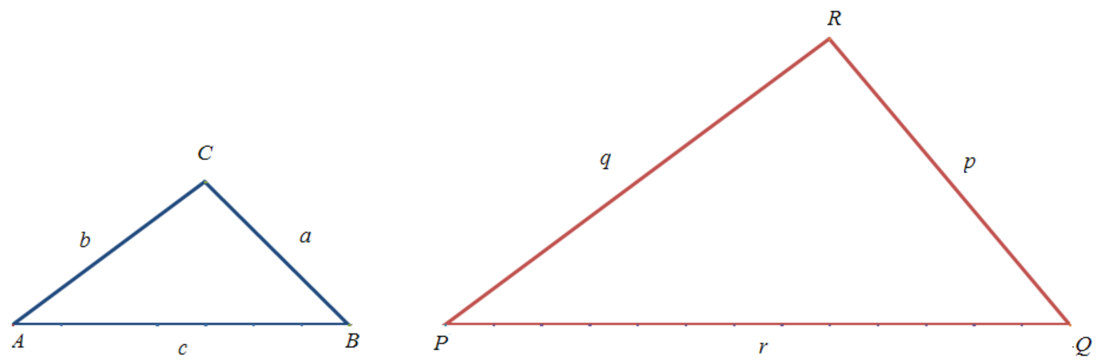
2.2.3.2 Podobnost geometrických útvarů

„Zobrazení v rovině nazýváme podobným zobrazením neboli podobností, jestliže každé úsečce AB přiřazuje úsečku A'B'= k·AB, kde k > 0. Číslo k se pak nazývá poměr podobnosti .“ (**Polák**, 1980, str. 414, [8])

Někdy se poměr podobnosti označuje též jako koeficient podobnosti.

PŘÍKLAD 1: Trojúhelník ABC má délky stran: a = 4 cm, b = 5 cm, c = 7 cm. Vypočítejte délky stran trojúhelníka PQR podobného s trojúhelníkem ABC, je-li p = 8 cm. Určete poměr podobnosti k.

Řešení:



a = 4 cm

b = 5 cm

c = 7 cm

p = 8 cm

Nejprve spočítáme poměr podobnosti k. Strana p odpovídá v trojúhelníku ABC straně a. Poměr podobnosti k tedy vypočítáme:

$$k = \frac{p}{a} = \frac{8}{4} = \underline{\underline{2}}$$

Známe-li poměr podobnosti, můžeme dopočítat podle definice i stranu q a r.

$q = k \cdot b = 2 \cdot 5 = \underline{10\ cm}$

$r = k \cdot c = 2 \cdot 7 = \underline{14\ cm}$

Odpověď: Poměr podobnosti k mezi trojúhelníky ABC a PQR je roven 2. Délky stran jsou pak: q = 10 cm a r = 14 cm.

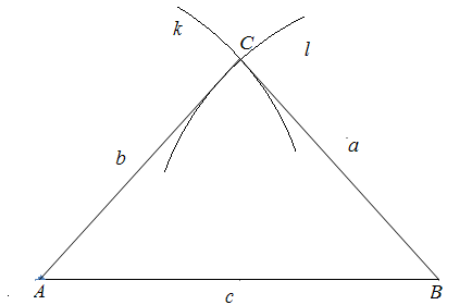
PŘÍKLAD 2: Narýsujte dva libovolné podobné rovnoramenné trojúhelníky ABC a PQR, kde $p = \frac{1}{4}a$. Narýsujte je tak, aby platilo: B = Q; P ϵ c.

Řešení:

Nejprve narýsujeme rovnoramenný trojúhelník ABC. Tento trojúhelník může být libovolný rovnoramenný, zvolíme si tedy např. délky stran: a = 4 cm, b = 4 cm, c = 6 cm.

Postup konstrukce ΔABC:

1) |AB|; |AB| = 6 cm.
2) k, k (A, 4 cm)
3) l; l (B, 4 cm)
4) C; $k \cap l = C$

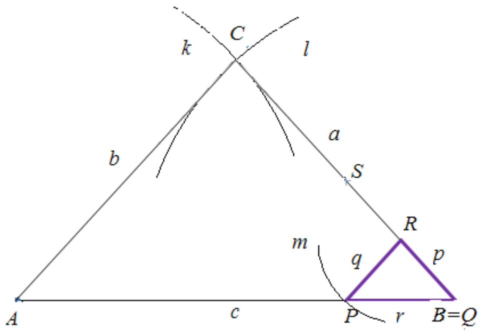


Postup konstrukce ΔPQR

5) Q; Q = B
6) S; S ϵ a; |CS| = |BS|
7) R; Rϵ |BS|; |RB| = |RS|

   možno i početně $p = \frac{1}{4}a = 1\text{cm}$

8) m; m(R,|RB|)
9) P; $m \cap c = P$
10) ΔPQR



Diskuze řešení:

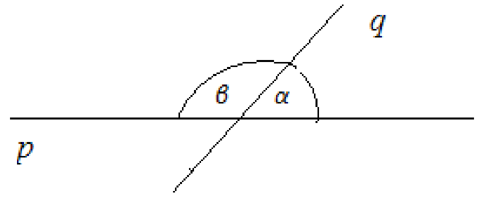
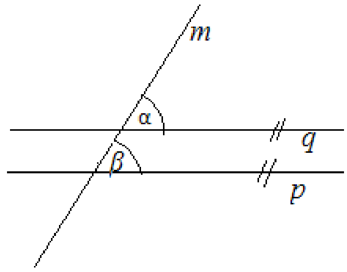
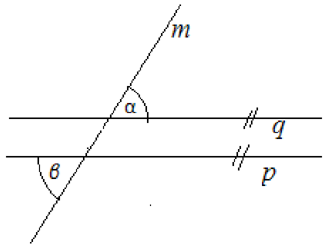
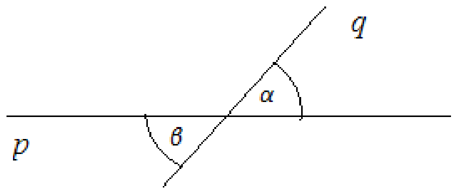
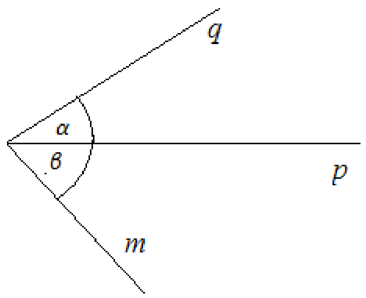
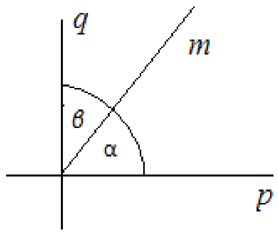
Pro zvolený trojúhelník ABC existuje v dané polorovině právě jedno řešení úlohy.

2.2.3.3 Úhly

„Úhel je část roviny omezená dvěma polopřímkami se společným počátkem.“

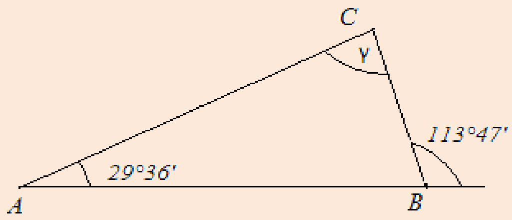
Jiná definice: *„Rovinným úhlem nazýváme množinu všech bodů všech polopřímek VX se společným počátkem V, kde bod X patří do daného oblouku AB kružnice k se středem v bodě V.“*

(**Procházka**, 2000, str.1, [Int 10])

DVOJICE ÚHLŮ	
Vedlejší úhly: $\alpha + \beta = 180°$	
Souhlasné úhly: $\alpha = \beta$	
Střídavé úhly: $\alpha = \beta$	
Vrcholové úhly : $\alpha = \beta$	
Styčné úhly:	
Doplňkové úhly: $\alpha + \beta = 90°$	

(**Mikulčák,** 1993, [5])

PŘÍKLAD 1: Urči velikost úhlu γ v ΔABC.



<u>Řešení:</u>

Vnitřní úhel trojúhelníka ABC u vrcholu B označíme β. Je to vedlejší úhel k zadanému úhlu, tudíž musí platit:

β + 113°47‘ = 180° / – 113°47‘

<u>β= 66°13‘</u>

Součet vnitřních úhlů Δ je 180°. Pro úhel γ platí:

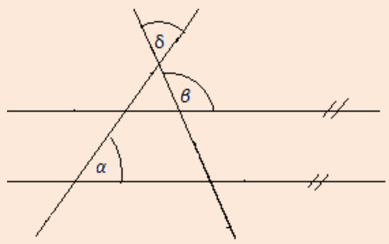
γ = 180° – 66°13‘ – 29°36‘

γ = 180° – 95°49‘

<u>γ = 84°11‘</u>

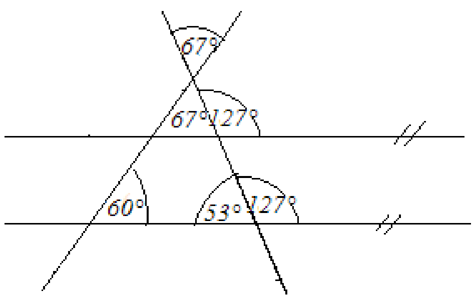
<u>Odpověď:</u> Velikost úhlu γ je 84°11‘.

<u>PŘÍKLAD 2</u>: Urči úhel δ, je-li α = 60°, β = 127°.



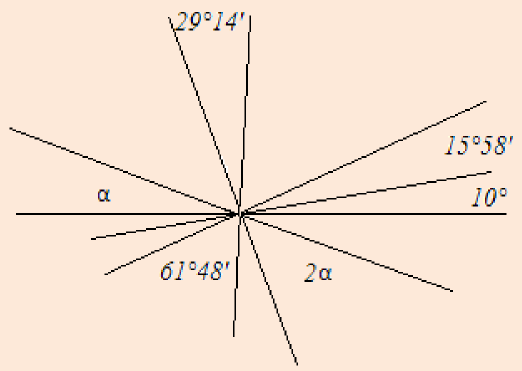
<u>Řešení:</u>

K řešení použijeme znalosti ze začátku kapitoly o dvojici úhlů. Do obrázku zapíšeme velikosti úhlů, dále využijeme znalosti, že součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je roven 180°.



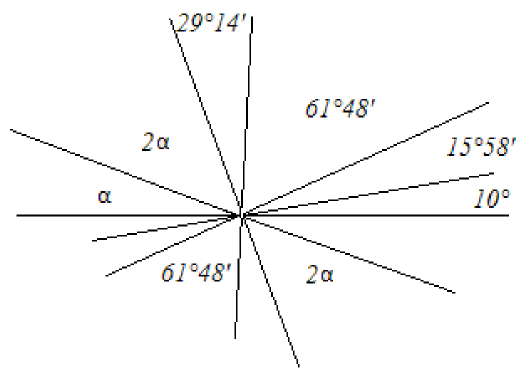
<u>Odpověď:</u> Velikost úhlu *δ* je 67°.

PŘÍKLAD 3: Urči velikost úhlu α.



Řešení:

Ze znalosti vlastnosti dvou vrcholových úhlů, můžeme doplnit velikosti úhlů do horní poloroviny.



Součet všech vedlejších úhlů v horní polorovině musí být roven 180°:

$$10° + 15°58' + 61°48' + 29°14' + 2\alpha + \alpha = 180°$$

Dostáváme tak lineární rovnici o jedné neznámé *α*. Sečteme stupně a minuty na levé straně, vyjádříme úhel α:

$$117° + 3\alpha = 180° \qquad / - 117°$$

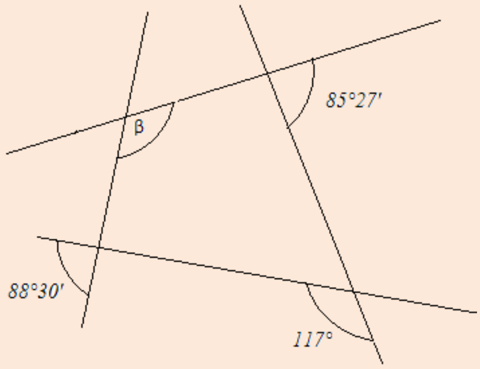
$$3\alpha = 180° - 117°$$

$$3\alpha = 63° \qquad / : 3$$

$$\underline{\underline{\alpha = 21°}}$$

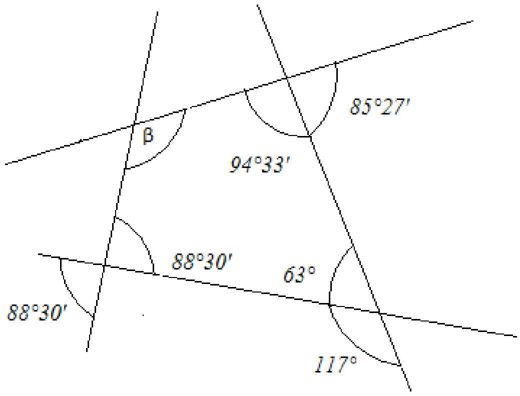
Odpověď: Velikost úhlu α je 21°.

PŘÍKLAD 4: Urči velikost úhlu β.



Řešení:

V řešení tohoto příkladu využijeme toho, že součet všech vnitřních úhlů čtyřúhelníka musí být roven 360°. Ze znalosti vlastností dvojic úhlů snadno doplníme tři vnitřní úhly a čtvrtý úhel β pak dopočítáme jako doplněk do 360°:



$$360° = 88°30‘ + 63° + 94°33‘ + \beta \qquad / - 88°30‘ - 63° - 94°33$$

$$\beta = 360° - 88°30‘ - 63° - 94°33$$

$$\underline{\underline{\beta = 113°57‘}}$$

Odpověď: Velikost úhlu β je 113°57‘.

2.2.3.4 Objem a povrch těles

„Objem je veličina, která vyjadřuje velikost prostoru, kterou zabírá těleso.“ ([**W2]**, 1999)

Objem značíme **V** a jeho základní jednotkou je m^3 (čti metr krychlový).

„Povrch je obsah plochy, která je hranicí geometrického tělesa.“ ([**W6]**, 1999)

Povrch značíme **S** a jeho základní jednotkou je m^2 (čti metr čtvereční).

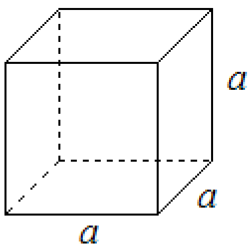
VZORCE PRO VÝPOČET POVRCHU A OBJEMU ZÁKLADNÍCH GEOMETRICKÝCH TĚLES		
Těleso	**Povrch**	**Objem**
Krychle	$S = 6a^2$	$V = a^3$
Kvádr	$S = 2 \cdot (ab + ac + bc)$	$V = abc$
Válec	$S = 2\pi r^2 + 2\pi rv$	$V = \pi r^2 v$
Jehlan	$S = S_p + S_{pl}$	$V = \frac{1}{3} S_p v$
Kužel	$S = \pi r^2 v + \pi rs$	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$
Koule	$S = 4\pi r^2 = \pi d^2$	$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi d^3}{6}$

(**Běloun a kol.,** 1983, [1])

PŘÍKAD 1: Mějme krychli a kvádr stejného objemu. Hrana krychle je 5 cm, kvádr má obdélníkovou podstavu s délkou 3 cm a šířkou 2 cm. Jaká je výška kvádru? Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

Řešení:

V první řadě spočítáme objem krychle:

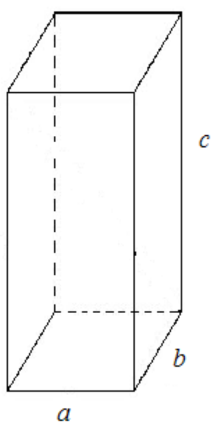


$V = a^3$

$V = 5^3$

$\underline{\underline{V = 125\ cm^3}}$

Ze zadání víme, že objem kvádru je stejný jako objem krychle. Ve vztahu pro objem kvádru tak zbývá pouze jedna neznámá veličina, kterou je právě hledaná výška kvádru c.



$V = a \cdot b \cdot c$

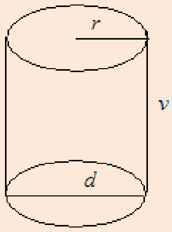
$c = \frac{V}{ab}$

$c = \frac{125}{3 \cdot 2}$

$\underline{\underline{c \cong 20{,}83\ cm}}$

Odpověď: Výška kvádru je přibližně 20,83 cm.

PŘÍKLAD 2: Rozměry válce jsou obecně vyjádřeny jako d = (2x – 4) metrů, v = (x + 3) metrů. Určete objem takového obecného válce.



Řešení:

Obecný vztah pro objem válce je: $V = \pi r^2 v$.

K výpočtu objemu podle tohoto vztahu potřebujeme znát poloměr kruhové podstavy. Využijeme tedy vztahu mezi poloměrem a průměrem:

$$r = \frac{d}{2}$$

$$r = \frac{2x-4}{2}$$

$$r = \frac{2(x-2)}{2}$$

$$\underline{\underline{r = (x-2)}} \text{ metrů}$$

Nyní můžeme dosadit do obecného vztahu pro objem válce:

$$V = \pi r^2 v = \pi(x-2)^2(x+3) = \pi \cdot (x^2 - 4x + 4)(x+3) = \pi \cdot (x^3 + 3x^2 - 4x^2 - 12x + 4x + 12) =$$

$$= \underline{\underline{\pi \cdot (x^3 - x^2 - 8x + 12)}}$$

2.2.4 Nestandardní aplikační úlohy a problémy

V této kapitole jsou zařazena témata, která podle RVP ZV v oblasti Matematika a její aplikace odpovídají tematickému okruhu *Nestandardní aplikační úlohy a problémy* (viz. kapitola 1.1.1.3 str. 17) a zároveň se v určité míře vyskytují i v přijímacích testech z matematiky na SŠ (dle sbírek a ukázek testů na webových stránkách škol). Těmito tématy jsou: Číselné a logické řady, Úlohy o společné práci, Logické a netradiční geometrické úlohy.

2.2.4.1 *Číselné a logické řady*

Číselné a logické řady se vyskytují v matematických testech středních škol minimálně, ale velmi často se vyskytují ve SCIO testech z matematiky, nebo jsou součástí testů všeobecných znalostí, IQ testů, různých logických testů či ústních pohovorů u přijímacích zkoušek. Slouží k přezkoušení logického myšlení. Proto zde uvedeme jen okrajově i tuto problematiku.

Výraz tvaru $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, nebo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kde $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nekonečná posloupnost, $n \in \mathbf{N}$, $a_n \in \mathbf{R}$ se nazývá NEKONEČNÁ ŘADA. Čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ nazýváme členy řady, a_n je n-tý člen řady.

(**SEDLÁČEK A KOL.**, 1981, [9])

Úlohy jsou zadávány většinou řadou symbolů, kde jeden nebo více prvků chybí. Žák tak musí nalézt vztah mezi prvky a určit chybějící prvek. U řad tvořených symboly žák dostává na výběr různé možnosti, ze kterých vybírá správné řešení, u číselných řad musí výsledek určit bez výběru z možností.

PŘÍKLAD 1 :

Která čísla chybí v následujících číselných řadách?

a) 94; 85; 76;?; 58; 49; 40

b) 2;3;5;8;?; 21;34

Řešení:

a) Pro čísla v této řadě platí: přičteme-li k danému číslu 9, dostaneme číslo předcházející, odečteme-li od daného čísla 9, dostaneme číslo následující. V řadě a pak musí chybět číslo 67.

b) Pro čísla v této řadě platí: Součet dvou čísel po sobě jdoucích dá číslo následující. Chybějící číslo tak musí být číslo 13.

PŘÍKLAD 2: Které číslo chybí v následující řadě: $1; \frac{2}{4}; \frac{4}{9}; \frac{8}{16}; \frac{16}{25}$; ?

Řešení:

Pro všechny čitatele platí, že je lze přepsat jako mocninu dvou, naopak jmenovatele lze přepsat jako druhé mocniny různých čísel:

$$1 = \frac{2^0}{1}$$

$$\frac{2}{4} = \frac{2}{2^2}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{2^2}{3^2}$$

$$\frac{8}{16} = \frac{2^3}{4^2}$$

$$\frac{16}{25} = \frac{2^4}{5^2}$$

Vidíme, že v čitateli vždy o jednotku vzroste mocnina, zatímco ve jmenovateli vždy o jednotku vzroste základ mocniny, hledané číslo tak bude: $\underline{\underline{\frac{2^5}{6^2} = \frac{32}{36}}}$

PŘÍKLAD 3: Které číslo chybí v následující číselné řadě: 34; 63; 121; ?; 469

Řešení:

Pro každé číslo v řadě platí: Následující číslo je rovno dvojnásobku čísla předešlého mínus pět.

$63 = 2 \cdot 34 - 5$

$121 = 2 \cdot 63 - 5$

$? = 2 \cdot 121 - 5 = 242 - 5 = \underline{\underline{237}}$

$469 = 2 \cdot 237 - 5$

PŘÍKLAD 4: Urči, která čísla nebo písmena patří na místo **?** v následující řadě: 3; C; 5; D; 7; E; 9; G; ?; ?

Řešení:

Na lichých pozicích se vyskytují čísla, která se vždy zvyšují o 2. Za písmenem G tak bude číslo 11.

3; C; 5; D; 7; E; 9; G; ?; ?

Na sudých pozicích se vyskytují písmena abecedy, na první pohled není znát princip přiřazování písmen, napíšeme-li začátek abecedy: A,B,C,Č,D,Ď,E,F,G,H,CH,I,J, ,…

Můžeme spočítat, kolikátá jsou daná písmena v abecedě:
C = 3, D = 5, E = 7, G = 9.

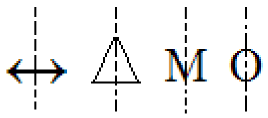
Čísla v řadě tedy určují, kolikáté je následující písmeno v abecedě. Na 11. pozici je písmeno CH.

PŘÍKLAD 5: Který z následujících symbolů patří na místo otazníků v řadě: ↔, Δ, M, O, ?

a) ℓ b) W c) Д d) £

Řešení:

Všechny symboly ze zadané řady jsou osově souměrné:



hledaný symbol musí být osově souměrný.

a) není osově souměrný

b) je osově souměrný

c) není osově souměrný

d) není osově souměrný

2.2.4.2 Logické a netradiční geometrické úlohy

V přijímacích testech se často vyskytují úlohy, které vyžadují aplikaci a kombinaci poznatků z různých tematických či vzdělávacích oblastí. Žák zde také často využije svou prostorovou představivost. Takových příkladů je velké množství, v následující kapitole jsou tak uvedeny alespoň některé typy, na kterých si žák může ověřit své schopnosti, aplikovat a propojovat své dosavadní znalosti a zkušenosti.

Komentář: Následující úlohy kombinují znalosti z geometrie s procenty.

PŘÍKLAD 1: Zahradní bazén s obdélníkovou podstavou délky 5 m a šířky 3 m a výškou 1,5 m je ze 76 % naplněn vodou. Kolik vody je v bazénu?

Řešení:

Objem celého bazénu je:

$V = a \cdot b \cdot c$

$V = 3 \cdot 5 \cdot 1{,}5$

$V = 22{,}5\ m^3$

Aby v bazénu bylo 22,5 m^3 vody, musel by být plný až po okraj. Bazén je však plný pouze ze 76 %, pomocí trojčlenky musíme tedy spočítat, kolik je 76 % z 22,5 m^3:

100 %............ 22,5 m^3

76 %.............. x

$$x = \frac{76 \cdot 22{,}5}{100}$$

$x = 17{,}1\ m^3$

Odpověď: V bazénu je 17,1 m^3 vody.

PŘÍKLAD 2: V obdélníkové místnosti o rozměrech 4 x 6 metrů je postavená skříň o rozměrech 0,8 x 2,5 metry. Kolik % plochy místnosti zabírá skříň?

Řešení:

nejprve spočteme obsah místnosti S:

$$S = 2 \cdot (a + b)$$

$$S = 2 \cdot (4 + 6)$$

$$S = 20\ m^2$$

Nyní spočítáme obsah plochy, který je zastavěn skříní S_s:

$$S_S = 2 \cdot (a + b)$$

$$S_S = 2 \cdot (0{,}8 + 2{,}5)$$

$$S_S = 6{,}6 m^2$$

Úloha se ptá, kolik procent místnosti zabírá skříň, musíme tedy vypočítat, kolik je 6,6 m^2 procent z 20 m^2:

20 m^2............ 100 %

6,6 m^2........... x %

$$x = \frac{6{,}6 \cdot 100}{20}$$

$$\underline{\underline{x = 33\%}}$$

<u>Odpověď:</u> Skříň zabírá 33% plochy místnosti.

<u>Komentář</u>: následující úlohy kombinují znalosti z geometrii se znalostmi poměrů.

PŘÍKLAD 3: Máme dva rovnostranné trojúhelníky, jejichž délky stran jsou v poměru 2 : 5. Součet jejich obvodů je 105 cm. Jaký je obsah trojúhelníka s kratší stranou?

<u>Řešení:</u>

o_1........obvod menšího trojúhelníka

o_2........obvod většího trojúhelníka

a_1........délka strany menšího trojúhelníka

$o = o_1 + o_2$

Jestliže jsou délky stran v poměru 2 : 5, budou v tomto poměru i obvody rovnostranných trojúhelníků. Musíme tedy 105 cm^2 rozdělit v poměru 2 : 5.

$$5 + 2 = 7$$

$$105 : 7 = 15$$

$$o_1 = 2 \cdot 15$$

$$\underline{\underline{o_1 = 30\ \text{cm}}}$$

$$o_2 = 5 \cdot 15$$

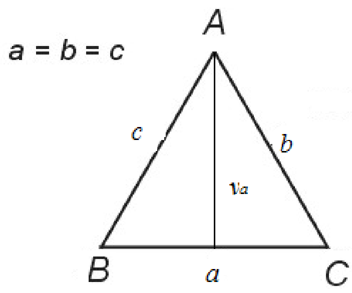
$$\underline{\underline{o_2 = 75\ \text{cm}}}$$

Známe-li obvod rovnostranného trojúhelníka, můžeme spočítat délku jeho strany:

$$o_1 = 3a$$

$$30 = 3a \qquad /: 3$$

$$\underline{\underline{a = 10\ \text{cm}}}$$

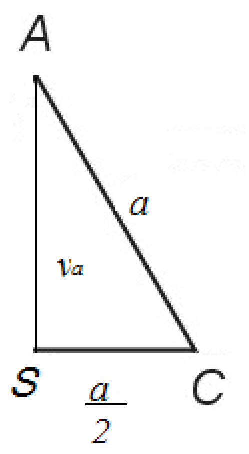


Máme spočítat obsah menšího trojúhelníka, obecný vzorec pro obsah menšího z trojúhelníků je:

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

Abychom mohli spočítat obsah, musíme si spočítat výšku trojúhelníka v_a. K výpočtu použijeme Pythagorovu větu. Kde spočteme v_a z pravoúhlého trojúhelníka ASC.

v_a je v pravoúhlém trojúhelníku ASC odvěsnou, proto pro jeho výpočet bude mít Pythagorova věta tvar:



$$v_a^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$v_a = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$v_a = \sqrt{10^2 - \left(\frac{10}{2}\right)^2}$$

$$v_a = \sqrt{100 - 25}$$

$$v_a = \sqrt{75}$$

$$v_a = 8{,}66\text{cm}$$

Známe-li výšku, můžeme spočítat obsah trojúhelníka:

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

$$S = \frac{10 \cdot 8{,}66}{2}$$

$$S = 43{,}3\,\text{cm}^2$$

Odpověď: Obsah trojúhelníka s kratší stranou je 43,3 cm^2.

PŘÍKLAD 4: Dva čtverce, jejichž strany jsou v poměru 5 : 3 mají součet obsahů roven 544 cm^2. Vypočítejte součet obvodů obou čtverců.

Řešení:

S_1.......... obsah prvního čtverce

S_2.......... obsah druhého čtverce

o_1.......... obvod prvního čtverce

o_2.......... obvod druhého čtverce

a_1.......... délka strany prvního čtverce

a_2.......... délka strany druhého čtverce

$S = S_1 + S_2$

$o = o_1 + o_2$

$S = 544\ cm^2$

Součet obsahů musíme rozdělit v poměru 25 : 9 (strany jsou v poměru 5 : 3, čísla v poměru musíme umocnit na druhou, neboť obsah čtverce je roven druhé mocnině délky strany).

544 : 34 = 16

$S_1 = 25 \cdot 16 = \underline{\underline{400\ cm^2}}$

$S_2 = 9 \cdot 16 = \underline{\underline{144\ cm^2}}$

Ze znalosti obsahů, můžeme vypočítat délky stran čtverců:

$$S_1 = a_1^2 \qquad S_2 = a_2^2$$
$$a_1 = \sqrt{S_1} \qquad a_2 = \sqrt{S_2}$$
$$a_1 = \sqrt{400} \qquad a_2 = \sqrt{144}$$
$$\underline{\underline{a_1 = 20cm}} \qquad \underline{\underline{a_2 = 12cm}}$$

Známe-li délky stran čtverců, můžeme spočítat jejich obvody:

$$o_1 = 4a_1 \qquad o_2 = 4a_2$$
$$o_1 = 4 \cdot 20 \qquad o_2 = 4 \cdot 12$$
$$\underline{\underline{o_1 = 80cm}} \qquad \underline{\underline{o_2 = 48cm}}$$

Úloha se ptá na součet obvodů těchto čtverců: $o = o_1 + o_2 = 80 + 48 = \underline{\underline{128\ cm}}$

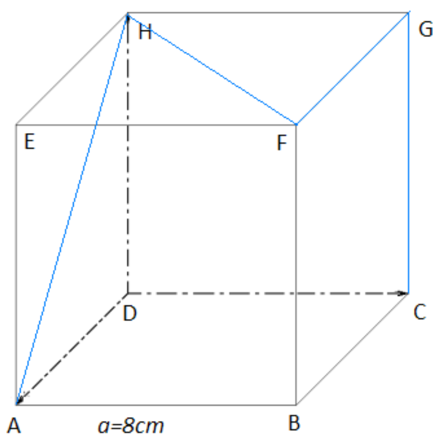
Odpověď: Součet obvodů těchto čtverců je 128 cm.

Komentář: Následující úloha kombinuje prostorovou představivost a Pythagorovu větu se znalostí základních geometrických vzorců.

PŘÍKLAD 5: Mravenec při své procházce po stole narazí na krychli ABCDEFGH s délkou hrany 8 cm. Jak velkou vzdálenost mravenec vykoná, jestliže se při jejím překonání pohybuje následovně: A → H → F → G → C ?
(Výsledek zaokrouhli na jedno desetinné místo)

Řešení:

Nejprve si nakreslíme náčrtek krychle, kde vyznačíme cestu mravence:



(**FRANTÍK**, 2007, [Int 1])

Mravenec překoná dvakrát délku stěnové úhlopříčky ($|AH|, |HF|$) a dvakrát délku hrany ($|FG|, |GC|$). Stěnové úhlopříčky jsou v krychli všechny stejně dlouhé. Označíme-li vzdálenost, kterou mravenec urazí s, můžeme obecně psát:

$$\mathbf{s = 2u + 2a}$$

Nyní musíme spočítat délku stěnové úhlopříčky krychle ABCDEFGH. Tuto úhlopříčku můžeme spočítat například z pravoúhlého trojúhelníku ADH pomocí Pythagorovy věty, kde u je přepona tohoto trojúhelníku.

Platí:

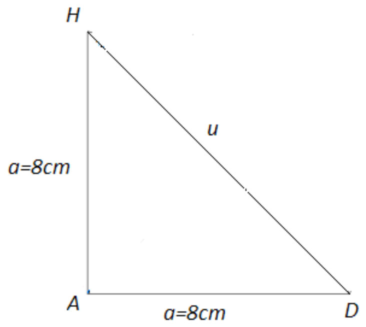
$u = \sqrt{a^2 + a^2}$

$u = \sqrt{2a^2}$

$u = a\sqrt{2}$

$u = 8\sqrt{2}$

$\underline{\underline{u \cong 11{,}3 \text{ cm}}}$



Nyní můžeme dosazením do vztahu pro s, spočítat vzdálenost, kterou urazí mravenec při překonávání krychle:

$s = 2u + 2a \cong 2 \cdot 11{,}3 + 2 \cdot 8 = 22{,}6 + 16 = \underline{38{,}6 \text{ cm}}$

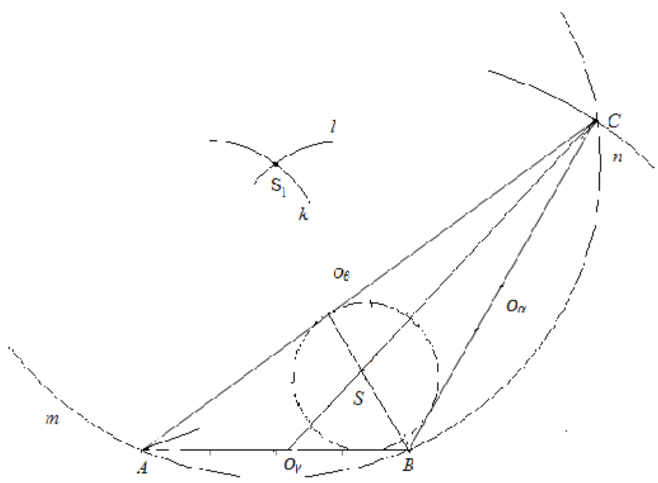
<u>Odpověď:</u> Mravenec na své cestě při překonávání krychle urazí přibližně 38,6 cm.

<u>Komentář:</u> následující příklad kombinuje znalosti o kružnicích vepsaných a opsaných.

PŘÍKLAD 6: Máme Δ ABC, kde $|AB| = 4\text{cm}$, a = 6 cm, poloměr kružnice opsané je 5 cm. Narýsuj kružnici vepsanou Δ ABC.

<u>Řešení:</u>

<u>Náčrtek:</u>



Postup konstrukce:

1) $|AB|; |AB| = 4cm$
2) $k; k(A, 5cm)$
3) $l; l(B, 5cm)$
4) $S_1; S_1 \in k \cap l$
5) m; m (S1, 5cm)
6) n; n (B, 6 cm)
7) $C; C \in m \cap n$
8) ΔABC
9) $o_\beta; o\gamma$ - osy úhlů β, γ
10) S; $S \in o_\beta \cap o_\gamma$
11) $p; p(S, |AB|)$ …kružnice vepsaná

Samotnou konstrukci zde provádět nebudeme, neboť podle postupu a náčrtku ji každý může provést sám.

Diskuze: Zadání má dvě možná řešení, a to řešení v horní a dolní polorovině.

2.2.4.3 Úlohy o společné práci

SPOLEČNÉ ZNAKY ÚLOH O SPOLEČNÉ PRÁCI
Pracují dva, tři či více objekty.
Práci začnou i ukončí většinou naráz (stejná doba společné práce, stejný čas).
Můžeme však počítat i příklady, kdy tělesa, osoby nepracují naráz, ale jeden začne a druhý se k němu přidá, či naopak začnou společně a jeden skončí dříve (pak doba, čas společné práce stejný není).
Celá společná práce se rovná jednomu celku (ať jich pracuje libovolný počet, nakonec dokončí jenom jednu jedinou práci).
Při výpočtech vycházíme vždy z toho, jakou část společné práce udělá každý objekt za 1 časovou jednotku (hodinu, den, minutu…).
Celá společná práce je tvořena **součtem** částí společné práce, vykonaných jednotlivými objekty, které se na společné práci podílejí.
Někdy nemusí pracovat společně, ale mohou pracovat proti sobě, např. jednou hadicí voda přitéká, druhou odtéká. Pak není společná práce tvořena součtem, ale **rozdílem**.

(**Macháňová**, 2010, [Int 6])

PŘÍKLAD 1: Pan Novák chce kolem své zahrady nechat postavit zeď. Pozve si dva zedníky. První zedník, pan Novotný, by sám zeď postavil za 4 dny. Druhý zedník, pan Knobloch, by zeď sám postavil za 5 dnů. Za jak dlouho tuto zeď postaví společně?

Řešení:

Pan Novotný: 4 dny................. celá zeď

1 den .... $\frac{1}{4}$ zdi

Pan Knobloch: 5 dní.................. celá zeď

1 den .... $\frac{1}{5}$ zdi

Společně za jeden den postaví: $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}$ zdi

Společně za x dnů postaví celou jednu zeď: $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\cdot x = 1$

Vypočítáme neznámou *x*, která udává počet dní, potřebných k postavení zdi při spolupráci obou zedníků:

$$\frac{9}{20}x = 1 \qquad / \cdot 20$$

$$9x = 20 \qquad /: 9$$

$$x = \frac{20}{9}$$

$$x = 2{,}2222222$$

$$\underline{x = 2 \text{ dny } 5 \text{ hod } 20 \text{ min.}}$$

Odpověď: Oba zedníci společně postaví zeď za 2 dny 5 hodin a 20 minut.

PŘÍKLAD 2: Hasičská nádrž se naplní prvním přívodem za 8 hod. Druhým přívodem by se ta samá nádrž naplnila za 10 hodin. Za jak dlouho se nádrž naplní oběma přívody najednou?

Řešení:

1. přívod: 8 hod......... celá nádrž

1 hod......... $\frac{1}{8}$ nádrže

2. přívod: 10 hod....... celá nádrž

1 hod......... $\frac{1}{10}$ nádrže

Společně za jednu hodinu naplní: $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{8}\right)$ nádrže

Společně za x hodin naplní celou nádrž: $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{8}\right)\cdot x = 1$

Vypočítáme neznámou x, která udává počet hodin potřebných k naplnění nádrže oběma přívody:

$$\frac{4+5}{40}\cdot x = 1$$

$$\frac{9}{40}\cdot x = 1 \qquad / \cdot 40$$

$$9x = 40 \qquad / : 9$$

$$x = \frac{40}{9} = 4\frac{4}{9} \text{ hod}$$

$$x \cong 4 \text{ hod } 27 \text{ min}$$

Odpověď: Oba přítoky společně naplní hasičskou nádrž za 4 hodiny a 27 minut.

PŘÍKLAD 3: Zemědělec potřebuje zorat svá pole. Zorá-li si pole sám, bude mu to trvat 9 dní. Chce si tedy pozvat 2 pomocníky. Prvnímu by samotnému tvalo zorat všechna pole 10 dní a druhému pomocníkovi dnů 12. Kolik dní zemědělec ušetří, budou-li orat všichni tři?

Řešení:

Zemědělec: 9 dní .... všechna pole

1 den .... $\frac{1}{9}$ polí

1. pomocník: 10 dní .... všechna pole

1 den.............. $\frac{1}{10}$ polí

2. pomocník: 12 dní .... všechna pole

1 den.............. $\frac{1}{12}$ polí

Společně za jeden den: $\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right)=\frac{20+18+15}{180}=\frac{53}{180}$ polí

Společně za x dnů zorají všechna pole:

$$\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{12}\right)\cdot x = 1$$

$$\frac{53}{180}x = 1 \qquad /\cdot 180$$

$$53x = 180 \qquad / : 53$$

$$x = \frac{180}{53} = 3\frac{21}{53} \text{ dní}$$

Odpověď: Společně zorají pole za $3\frac{21}{53}$ dní, tj. přibližně 3 dny a 9,5 hodiny.

Komentář: příklad 4 je zaměřen na společnou práci konanou proti sobě.

Příklad 4: Zahradník si k sazenicím melounu postavil plechovou nádobu s proděravělým dnem, kterým má voda postupně zavlažovat sazenice. Pokud by nádoba nebyla děravá, trvalo by zahradníkovi její naplnění 35 minut. Samovolné vyprázdnění nádoby trvá 1 hodinu. Jak dlouho bude zahradníkovi trvat naplnit tuto nádobu?

Řešení:

Zahradník: 35 minut .... celá nádoba

1 minuta .... $\frac{1}{35}$ nádoby

Děravé dno: 60 minut .... celá nádoba

1 minuta .... $\frac{1}{60}$ nádoby

Společně za jednu minutu přibude $\frac{1}{35}-\frac{1}{60}$ objemu nádoby.

Společnou prací za x hodin minut dojde k naplnění celé nádrže:

$$\left(\frac{1}{35}-\frac{1}{60}\right)\cdot x = 1$$

$$\frac{12-7}{420}\cdot x = 1 \qquad / \cdot 420$$

$$5x = 420 \qquad /: 5$$

$$x=\frac{420}{5}=84 \text{ minut} = 1 \text{ hod } 24 \text{ minut}$$

Odpověď: Zahradník děravou nádobu naplní za 1 hodinu a 24 minut.

PŘÍKLAD 5: Instalatérská firma dostala za úkol svařit horkovzdušného potrubí. Prvnímu instalatérovi by svaření potrubí trvalo 14 dní, druhému instalatérovi 12 dní. Jelikož práce musí být hotová za 4 dny, musela firma najmout ještě jednoho svářeče. Jak dlouho by trvalo svaření potrubí samotnému najatému svářeči, když ve třech stihli instalatéři svařit potrubí přesně za 4 dny?

Řešení:

1. instalatér: 14 dní .... celé potrubí

1den .... $\frac{1}{14}$ potrubí

2. instalatér: 12 dní .... celé potrubí

1den .... $\frac{1}{12}$ potrubí

3. najatý svářeč: x dní .... celé potrubí

1 den .... $\frac{1}{x}$ potrubí

Společně za jeden den svaří: $\frac{1}{14}+\frac{1}{12}+\frac{1}{x}$ potrubí

Společně za 4 dny svaří celé potrubí: $\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{12}+\frac{1}{x}\right)\cdot 4=1$

$$\left(\frac{6x+7x+84}{84x}\right)\cdot 4 = 1 \qquad / \cdot 84x$$

$$(6x + 7x + 84) \cdot 4 = 84x$$

$$24x+28x+336 = 84x \qquad / - 52x$$

$$32x = 336 \qquad / : 32$$

$$x=\frac{336}{32}=\frac{21}{2}=10{,}5\,\text{dne}$$

Odpověď: Najatý svářeč by sám potrubí svářel 10,5 dne.

Komentář: Příklad 6 je zaměřen na společnou práci, kdy čas společné práce není stejný jako čas celkové práce.

PŘÍKLAD 6: Děda by své políčko brambor vybral sám za 8 hodin, babičce by to samé pole trvalo vybrat 7 hodin. Jak dlouho trvalo vybrat celé pole, jestliže nejprve 2 hodiny vybíral děda brambory sám a poté mu přišla pomoci babička?

Řešení:

Délka společné práce...................... x hodin

Děda: 8 hodin ....celé pole

1 hodina .... $\frac{1}{8}$ pole

Za 2 hod samostatné práce a x hod společné práce….. $\frac{x+2}{8}$ pole

Babička: 7 hodin ....celé pole

1 hodina .... $\frac{1}{7}$ pole

Za *x* hod společné práce .... $\frac{x}{7}$ pole

Společně za x hodin společné práce:

$$\frac{x+2}{8}+\frac{x}{7}=1$$

$$\frac{7\cdot(x+2)+8x}{56}=1 \qquad /\cdot 56$$

$$7x + 14 + 8x = 56 \qquad / - 14$$

$$15x = 42 \qquad / : 15$$

$$x=\frac{42}{15}=\frac{14}{5}=2\frac{4}{5}=\underline{\underline{2 \text{ hod } 48 \text{ min}}}$$

Nesmíme však zapomenout, že x je čas, který strávili na poli společně babička s dědečkem. Otázkou však je, jak dlouho trvalo vybrat celé pole, tzn. musíme ke společně strávenému času přičíst čas, kdy byl na poli sám dědeček tedy 2 hod.

2 hod 48 min + 2 hod = 4 hod 48 min

Odpověď: Celé pole trvalo vybrat 4 hod 48 min.

2.2.4.4 Magické čtverce

V přijímacích testech z matematiky se podle internetových stránek středních škol občas vyskytují i různé magické čtverce, proto si i zde řekneme něco málo o magických čtvercích a ukážeme, jak postupovat při řešení takovýchto úloh.

„Obecně je magickým čtvercem nazýváno jakékoliv čtvercové schéma nejrůznějších objektů, nejčastěji čísel nebo písmen, rozmístěných podle nějakých pravidel.“

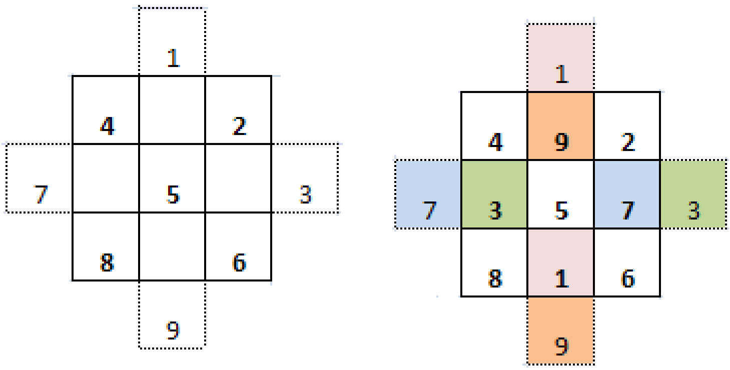
(**Fuchs**, 2004, str. 2, [Int 2])

„Magický čtverec řádu n je čtvercové schéma o n řádcích a n sloupcích, v němž jsou vepsána čísla 1, 2, 3, . . , n^2 tak, že součet čísel v každém řádku, sloupci i úhlopříčce je stejný.“ (**Fuchs**, 2004, str. 5, [Int 2])

„Součet čísel v řádcích, sloupcích a úhlopříčkách magického čtverce řádu n je zřejmě roven číslu $\frac{n \cdot (n^2+1)}{2}$*. Tomuto součtu se říká magické číslo.“*(**Fuchs**, 2004, str. 5, [Int 2])

Magický čtverec si každý může sestavit sám podle následujícího schématu:

Magický čtverec 3 x 3:



(**Šiřická,** 2009, [Int 13])

Magický čtverec 4 x 4:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

$\Rightarrow$

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

(**Perný**, 2010/2011, [7])

Jiný magický čtverec vznikne i přičtením libovolného stejného čísla ke všem políčkům základního magického čtverce.

Více informací o magických čtvercích lze nalézt na internetu, např. **Fuchs**, 2004, [Int 2].

PŘÍKLAD 1: Doplň magický čtverec tak, aby se v políčkách vyskytovala čísla 6 –14. Magické číslo čtverce je 30.

13		
8		
		7

Řešení:

Magické číslo čtverce udává výsledný součet v řádcích, sloupcích a úhlopříčkách. Můžeme tak hned dopočítat 1. sloupec a jednu úhlopříčku:

30 – 13 – 8 = 9

30 – 13 – 7 = 10

13		
8	10	
9		**7**

Po doplnění prvního sloupce a jedné úhlopříčky můžeme dopočítat druhý a třetí řádek:

30 – 8 – 10 = 12

30 – 9 – 7 = 14

13		
8	10	12
9	14	**7**

Nyní snadno doplníme druhý a třetí sloupec:

30 – 10 – 14 = 6

30 – 12 – 7 = 11

13	6	11
8	10	12
9	14	**7**

PŘÍKLAD 2: Doplň magický čtverec tak, aby se v tabulce vyskytovalo každé číslo od 1 do 16.

1	**15**		**4**
	6	**7**	
8	**10**		
	3		**16**

Řešení:

V druhém sloupci jsou doplněna všechna čtyři čísla, můžeme tak získat hodnotu součtu, která musí být ve všech řádcích, sloupcích a úhlopříčkách:

15 + 6 + 10 + 3 = **34**

Známe-li součet, můžeme dopočítat hodnoty v obou úhlopříčkách a prvním řádku:

34 – 10 – 7 – 4 = 13

34 – 1 – 6 – 16 = 11

34 – 1 – 15 – 4 = 14

1	**15**	14	**4**
	6	**7**	
8	**10**	11	
13	**3**		**16**

Po doplnění čísel 11, 13, 14 do magického čtverce můžeme dopočítat 3., 4. řádek a 1.,3. sloupec, po doplnění i těchto výsledků do čtverce chybí dopočítat pouze 2. řádek, který dopočítáme opět jako zbytek do 34:

34 – 8 – 10 – 11 = 5

34 – 13 – 3 – 16 = 2

34 – 1 – 8 – 13 = 12

34 – 12 – 6 – 7 = 9

1	**15**	14	**4**
12	**6**	**7**	9
8	**10**	11	5
13	**3**	2	**16**

2.3 Soubor neřešených úloh s výsledky

Zatímco kapitola 3 byla pro žáky částí, kdy si měli připomenout či se naučit různé metody výpočtů různých matematických problémů, tato kapitola by pro žáky měla být částí opakovací. Žáci zde mají možnost ověřit si, zda jsou schopni samostaně tyto úlohy řešit. V kapitole 2.4 str. se nacházejí zkušební testy, které ověřují část zpracovaného učiva a byly použity při výzkumu. Tyto testy mohou též sloužit žákům k procvičení a ověření jejich znalostí.

2.3.1 Číslo a proměnná

P1 Rozložte číslo 19800 na součin prvočísel. [$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 11$]

P2 Která z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 nejsou děliteli čísla 2340? [7, 8]

P3 Určete nejmenší společný násobek a nejmenší společný dělitel čísel 2520, 3780, 13860.

[n(2520, 3780,13860) = 83 160; D(2520, 3780, 13860)=1260]

P4 Vypočítejte: $\dfrac{\dfrac{16}{9}}{\dfrac{8}{4}-\dfrac{1}{3}}\cdot\dfrac{\dfrac{3}{6}+\dfrac{7}{4}}{\dfrac{21}{6}}$ $\left[\dfrac{24}{35}\right]$

P5 Najděte nejmenší společný násobek výrazů: $(a+b)^2; a^2-b^2; 8c^2b; 3cb^4$

$[24c^2b^4(a-b)(a+b)^2]$

P6 Anička má 3 různě dlouhé a barevné stuhy. Červená stuha měří 2100 cm, modrá stuha měří 420 cm a zelená stuha měří 630 cm. Na jaké nejdelší, stejně dlouhé části, může Anička stuhy rozstříhat? [210 cm]

P7 Kolik bonbónů by nejméně musela mít babička, aby šly rozdělit na 6 stejných, 8 stejných nebo 14 stejných hromádek? [168 bonbónů]

P8 Pavlík navštěvuje svou babičku každý devátý den. Jeho bratranec Pepík navštěvuje babičku každý patnáctý den. Po kolika dnech se vnuci vždy u babičky setkají?

[45 dní]

P9 Na kolik stejných, co největších čtverců můžeme rozstříhat arch papíru o rozměrech 198 cm a 231 cm [42 čtverců 33x33 cm]

P10 Zemědělec chce rozdělit 171 ha polí mezi své 4 syny. Po dlouhém uvažování se rozhodl, že pole rozdělí v poměru 7:5:4:3. Kolik ha pole dostane každý syn?

[63 ha, 45 ha, 36 ha, 27 ha]

P11 Pan Novák byl spoluvlastník jedné módní firmy. Svůj podíl ve firmě rozdělil mezi své dcery v poměru 4:3, kde větší část dostala starší dcera. Kolik procent firmy původně pan Novák vlastnil, jestliže mladší dcera dostala 24% z celé společnosti?

[56%]

P12 Zjistěte měřítko mapy, na níž je vzdálenost Praha - Liberec dlouhá 22 cm. Ve skutečnosti je cesta z Prahy do Liberce dlouhá 110 km. [1:500 000]

P13 Srovnejte podle velikosti od nejmenšího po největší:

$$(-3)^3; (-3)^2, -3^2, -(-2)^2, (-2)^2, (-3)^0$$

$[(-3)^3; -3^2; -(-2)^2; (-3)^0; (-2)^2; (-3)^2]$

P14 Vypočítejte:

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$ b) $-\left(\frac{2}{3}\right)^2$ c) $\frac{-2^2}{3}$ d) $6^4 : 6^2$ e) $\frac{300^4}{150^4}$

$\left[a)\frac{4}{9}; b)-\frac{4}{9}; c)-\frac{4}{3}; d)36; e)16 \right]$

P15 Vypočítejte následující rovnice:

a) 3x + 5 – 7x = 2x – 8 – x –12
b) – 4y – 8 + 9y = 7y + 10 + 4y
c) 4 + 5u + 3 = 5 – 2u + 6 + u
d) 3 (t + 2) + 2 (t – 3) = 4 (t + 2) + 5(t + 4)
e) 3(s – 2) + 4 = 3s + 2 – 2s
f) 2(r – 3) + 4 = 3r + 4 + r
g) 3(x + 2) – 6 x – 1 + 2(x – 1)= 4(2x + 3)
h) 3x + 6 – 2x – 8 = 2x – 6 – 4
i) 2x + 8 – x – 7 = x + 6 + x – 9

[**a)** x = 5; **b)** y = – 3; **c)** u = $\frac{2}{3}$; **d)** t = – 7; **e)** s = 2; **f)** r = – 3; **g)** x = –1 ;**h)** x = 8; **i)** x = 4]

P16 Jaké číslo máme na mysli, jestliže pro něj platí: po vynásobení třemi a přičtení čísla 4 dostaneme deset. [2]

P17 Otec je sedmkrát starší než syn, za 16 let bude otec 3 krát starší než syn. Kolik je dnes otci a synovi? [otec 56 let, syn 8 let]

P18 Otec je 5 krát starší než jeho syn. Za 11 let bude otec třikrát starší než jeho syn, kolik je otci a kolik synovi [otec 55 let, syn 11 let]

P19 Matce je 39 let, její dceři je 17. Před kolika lety byla matka 3 krát starší než její dcera?
[před 6 lety]

P20 Mamince je 47 let, synovi 22. Za kolik let bude matka 2 krát starší než syn?
[za 3 roky]

P21 Otci je 43 let, jeho synovi je 11 let. Za kolik let bude otec 3 krát starší než jeho syn?
[za 5 let]

P22 Vyřešte následující soustavy rovnic:

a) 2x + 7y = 4; – 5x + 4y = 3
b) 2x + 4y = 8; 4x + 8y = 6
c) x + 3·(7 – y) = 27; 4·(x –3) + 2y = 4
d) 8x – 14 y = 20; 4x – 7y = 10

[**a)** [x,y] = $\left[-\frac{5}{43}; \frac{26}{43}\right]$; **b)** nemá řešení; **c)** [x,y] = $\left[4\frac{2}{7}; -\frac{4}{7}\right]$; **d)** nekonečně mnoho řešení]

P23 Za 12 sušenek (po 9 Kč a 12 Kč) bylo zaplaceno 123 Kč. Kolik sušenek bylo za 12 Kč a kolik za 9 Kč? [sedm za 9 Kč a pět za 12 Kč]

P24 Ve třech různých pecích v pekárně se za 1 hodinu upeče celkem 1042 kusů pečiva. V první peci se upeče o 128 kusů pečiva více než v peci druhé a ve třetí peci se upeče třikrát více než v peci první. Kolik kusů pečiva se upeče za hodinu v každé peci?

[234 kusů, 106 kusů, 702 kusů]

P25 Pomocí vytýkání rozložte na součin:

a) $xy + x^2y - xy^2$

b) $10a^2b^3 - 5ab^2 + 20a^3b^3$

c) $a(5+b) - 2(5+b)$

d) $r(s-4) + s - 4$

e) $a^2 + 3b - 3a - ba$

f) $ac^2d - bcd^2 - a^2bc + ab^2d$

[**a)** $xy(1 + x - y)$; **b)** $5ab^2(2ab - 1 + 4a^2b)$; **c)** $(5 + b)(a - 2)$; **d)** $(s - 4)(r + 1)$; **e)** $(a - 3)(a - b)$; **f)** $(ac - bd)(cd - ab)$]

P26 Pomocí vzorců rozložte na součin:

a) $9x^2 - 169$

b) $x^2 - 16x + 64$

c) $4x^2 + 24x + 36$

[**a)** $(3x - 13)(3x + 13)$; **b)** $(x - 8)(x - 8)$; **c)** $(2x + 6)(2x + 6)$]

P27 Následující výrazy rozložte na součin:

a) $4x + 4y$

b) $xy + x^2y - xy^2$

c) $10a^2b^3 - 5ab^2 + 20a^3b^3$

d) $a(5 + y) - 2(5 + y)$

e) $x(y - 4) + y - 4$

f) $8 + 2x + xy + 4y$

g) $ac - bc - ad + bd$

h) $xyz^2 - 4xy$

i) $3a^3 + 24a^2 + 48a$

j) $16a^2b^3c^2 - 49a^2b^3d^2$

k) $8a - 8ab + 2ab^2$

l) $(3a+b)^2 - 3a - b$

[**a)** $4(x+y)$; **b)** $xy(1 + x - y)$; **c)** $5ab^2(2ab - 1 + 4a^2b)$; **d)** $(5 + y)(a - 2)$; **e)** $(y - 4)(x + 1)$; **f)** $(x + 4)(y + 2)$; **g)** $(a - b)(c - d)$; **h)** $xy(z - 2)(z + 2)$; **i)** $3a(a+4)\cdot(a+4)$; **j)** $a^2b^3(4c - 7d)\cdot(4c + 7d)$; **k)** $2a(2 - b)(2 - b)$; **l)** $(3a + b)(3a+b-1)$]

P28 Určete, pro které hodnoty proměnné má výraz smysl:

a) $\dfrac{3x+5}{x-4}$

b) $\dfrac{4a+2}{a(a+2)}$

c) $\dfrac{c+3}{2c-3}$

d) $\dfrac{b+c}{b^2-c^2}$

e) $\dfrac{4}{3ab+6b}$

f) $\dfrac{2a+1}{4l^2-8l}$

g) $\dfrac{m+5}{7m^3+21m^2}$

h) $\dfrac{x-3}{x^2+6x+9}$

i) $\dfrac{4}{a^2-4ab+4}$

j) $\dfrac{a}{a+b}$

k) $\dfrac{2a-1}{c^2-9}$

l) $\dfrac{3}{16a^2 - c^2}$

m) $\dfrac{k+3}{9c^2 - 49}$

n) $\dfrac{a}{(2b-c)^2}$

o) $\dfrac{l+1}{25 - 10l + l^2}$

p) $\dfrac{m-4}{36m^2 + 60m + 25}$

q) $\dfrac{18r+3}{2r^2 - 18}$

r) $\dfrac{4a+1}{a^2 + 2a}$

[**a)** $x \neq 4$; **b)** $a \neq 0 \wedge a \neq -2$;**c)** $c \neq \frac{3}{2}$; **d)** $b \neq \pm c$; **e)** $b \neq 0 \wedge a \neq -2$; **f)** $l \neq 0 \wedge l \neq 2$; **g)** $m \neq 0 \wedge m \neq -3$; **h)** $x \neq -3$;
i) $a \neq 2$; **j)** $a \neq b$; **k)** $c \neq \pm 3$;**l)** $c \neq \pm 4a$; **m)** $c \neq \pm \frac{7}{3}$; **n)** $c \neq 2b$; **o)** $l \neq 5$; **p)** $m \neq -\frac{5}{6}$; **q)** $r \neq \pm 3$; **r)** $a \neq 0 \wedge a \neq -2$]

P29 Určete podmínky, za kterých má následující výraz smysl, a zjednodušte ho:

a) $\dfrac{a^2 - b^2}{ab + b^2}$

b) $\dfrac{4b^2c^3d}{8bc^4d^2}$

c) $\dfrac{6x^2 + 4x}{x^3 + 4x^2 + 4x}$

d) $\dfrac{7x^2y^3z}{21x^2yz - 14x^2y^2z}$

e) $\dfrac{6y + 12y^2}{1 - 4y^2}$

f) $\dfrac{2t-2}{4-4t}$

g) $\dfrac{-2x^4 + 2x^3}{x-1}$

h) $\dfrac{4x^3 - 8x^2}{2x^3 - 8x}$

i) $\dfrac{2a^2 - 2b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$

[**a)** $b \neq 0; a \neq -b; \frac{a-b}{b}$ **; b)** $bcd \neq 0, \frac{b}{2cd}$; **c)** $x \neq 0 \wedge x \neq -2, \frac{2(3x+2)}{(x+2)^2}$; **d)** $xyz \neq 0 \wedge y \neq \frac{3}{2}, \frac{y^2}{3-2y}$; **e)** $y \neq \pm \frac{1}{2}$, $\frac{6y}{1-2y}$; **f)** $t \neq 1, -\frac{1}{2}$; **g)** $x \neq 1, -2x^3$; **h)** $x \neq 0, x \neq \pm 2, \frac{2x}{x+2}$; **i)** $a \neq b, \frac{2(a+b)}{a-b}$]

P30 Určete podmínky, za kterých má následující výraz smysl, a vypočítejte ho:

a) $\dfrac{a^2 - 16}{25 - b^2} \cdot \dfrac{10 - 2b}{4a + 16}$

b) $\dfrac{a+3}{b+3} + \dfrac{a-3}{b-3}$

c) $\dfrac{a-2}{a-2b} - \dfrac{a}{2a+4b} + \dfrac{3}{2}$

d) $\dfrac{c}{c-3} + \dfrac{2c}{c+1}$

e) $\dfrac{d^2 - 4}{d^3 - 4d^2 + 4d} : \dfrac{2d+4}{8d}$

f) $\dfrac{c^2 - d^2}{(4c+4d)^2} \cdot \dfrac{2c + 2d}{c^2 - 2cd + d^2}$

g) $\left(\dfrac{1}{a+1} - 1\right) : \left(a + \dfrac{a^2}{a+1}\right)$

[**a)** $a \neq -4; b \neq \pm 5; \frac{a-4}{2(5+b)}$ **; b)** $b \neq \pm 3; \frac{2(ab-9)}{b^2-9}$**; c)** $a \neq \pm 2b; \frac{2a^2 - 6b^2 + 3ab - 2a - 4b}{a^2 - 4b^2}$; **d)** $c \neq 3 \wedge c \neq -1$, $\frac{c(3c-5)}{(c-3)(c+1)}$;**e)** $d \neq 0 \wedge d \neq \pm 2, \frac{4}{d-2}$;**f)** $c \neq \pm d, \frac{1}{8(c-d)}$; **g)** $a \neq -1 \wedge a \neq 0 \wedge a \neq -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2a+1}$]

2.3.2 Závislosti, vztahy a práce s daty

ZV1 Pepíček při laboratorní úloze z fyziky naměřil desetkrát průměr ocelového válečku (viz. tabulka). Spočítejte průměrný poloměr tohoto válečku.

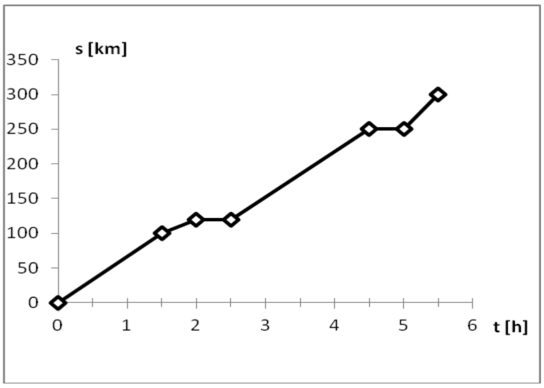
číslo měření	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
naměřená hodnota (mm)	132,3	132,8	132,3	132,4	132,6	132,5	132,5	132,7	132,1	132,4

[r = 66,23 mm]

ZV2 V hodině tělocviku žáci běhali 100 m. Pan učitel u jednotlivých žáků naměřil následující časy: 14,31 s; 15,29 s; 20 s; 19,8 s; 16 s; 16,3 s; 15 s; 18 s; 14,52 s; 16 s; 14,33 s; 18,56 s; 13,59 s; 15,51 s; 16 s; 18 s; 20 s. Jaký je průměrný čas žáků? Výsledek zaokrouhlete na dvě desetinná místa. [t = 16,54 s]

ZV3 Třída 9. A měla na vysvědčení průměr známek z matematiky 2,28. Jedničku mělo 7 žáků, dvojku 8 žáků, trojku 6 žáků, pětku nikdo. Ve třídě není více než 26 žáků. Kolik žáků dostalo na vysvědčení čtyřku? [4 žáci]

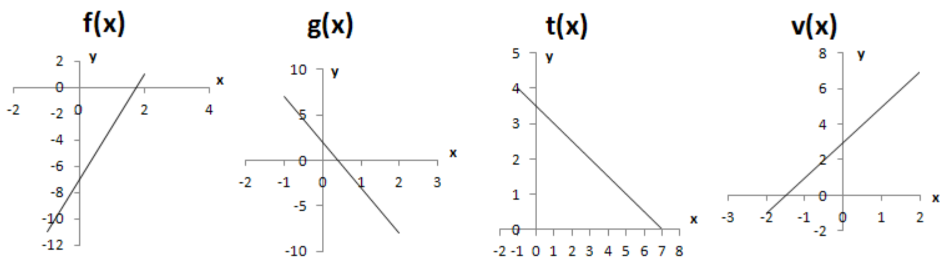
ZV4 Graf znázorňuje závislost dráhy s na čase t, při pohybu automobilu z místa A do místa B. Vzdálenost mezi A a B je 300 km.



a) Určete, kolik času automobil během cesty z místa A do místa B stál.
b) Určete, kolik km zbývalo automobilu do místa B v 9:30, jestliže vyjížděl z místa A v 8:00. [**a)** 1 hod; **b)** 200 km]

ZV5 Načrtněte grafy následujících funkcí:

a) $f(x) = 4x - 7$
b) $g(x) = -5x + 2$
c) $t(x) = -0,5x + 3,5$
d) $v(x) = 2x + 3$



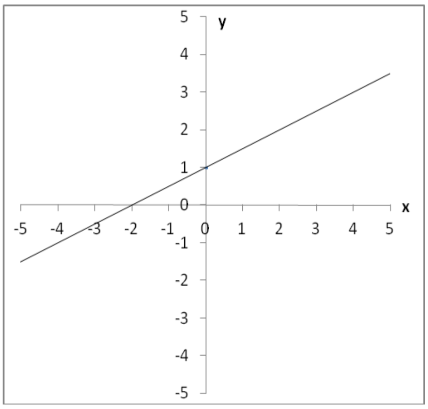
ZV6 Určete, který z následujících bodů neleží na grafu funkce $f(x) = -2x + 2$.

[0; 2]; [1; 0]; [– 1; 4]; [5; – 12]; [3; – 4]

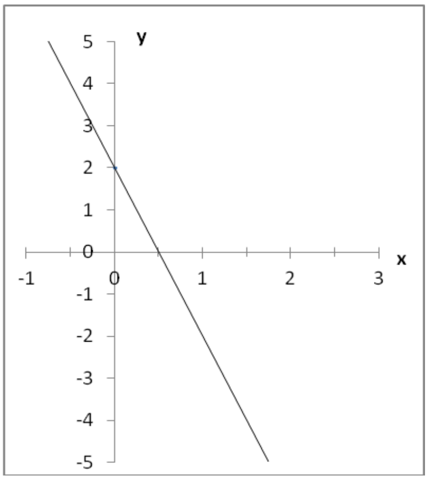
[[5, – 12]]

ZV7: Napište předpis funkce, jejíž graf je na obrázku.

a)



b)



[**a)** y = 0,5x + 1; **b)** y = – 4x + 2]

ZV8 Určete průsečíky funkcí:

a) f(x) = 3x + 2; g(x) = x – 8; D(f) = D(g) = **R**

b) h(x) = 3x – 4; l(x) = $-\frac{1}{2}$ x + 3; D(h) = D(l)= **R**

c) v(x) = – 0,6x + 6; u(x) = 0; D(v) = D(u) = **R**

d) s(x) = – x – 4; t(x) = x + 4; D(s) = D(t) = **R**

e) m(x) = 5x + 4; n(x) = – 2,5x – 3,5; D(m) = D(n) = **R**[**a)** P = [–5; –13]; **b)** P =[2; 2]; **c)** P=[10; 0]; **d)** P= [– 4; 0] ; **e)** P= [–1;– 1]]

2.3.3 Geometrie v rovině a v prostoru

G1 Vypočítejte délku strany m v pravoúhlém trojúhelníku KLM, je-li l = 4 cm a k = 5 cm. Pravý úhel je u vrcholu K. [m = 3 cm]

G2 V jaké výšce se bude žebřík dlouhý 10 m dotýkat zdi, opřeme-li ho o stěnu tak, že jeho pata bude od stěny vzdálena dva metry? [h = 9,8 m]

G3 Vypočítejte obvod pravoúhlého trojúhelníka KLM, kde odvěsny k a l mají následující délky: l = 56 mm, k = 3,3 cm. [o = 154 mm]

G4 Vypočítejte obsah rovnostranného trojúhelníka PQR, kde p = 10 cm.

[S = 43,3 cm^2]

G5 Jak dlouhé bude zábradlí u schodiště s 25 schody, jestliže každý schod bude široký 30 cm a 16 cm vysoký? [850 cm]

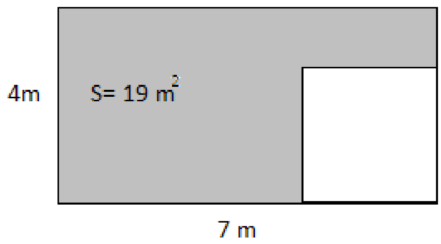
G6 Pyramida se čtvercovou základnou, kde délka hrany podstavy je 48 m, je vysoká 70 m. Spočítejte výšku boční stěny. [74 m]

G7 Spočítejte délku stěnové úhlopříčky krychle ABCDEFGH s délkou hrany 5 cm. Výsledek zaokrouhlete na 2 desetinná místa. Proveďte náčrtek. [7,07 cm]

G8 Vejde se tyč dlouhá 3,5 m do kabiny výtahu o rozměrech a = 160 cm, b = 23,1 dm, c = 2400 mm? [Ano, u_t = 3,7 m > 3,5 m]

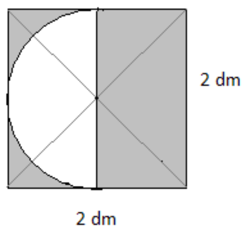
G9 Vypočítejte obsah rovnoramenného trojúhelníka ABC, kde c je průměrem kružnice k (S, 3 cm) a C ϵ k. [9 cm^2]

G10 Z údajů uvedených v obrázku vypočítejte délku strany vyříznutého čtverce.



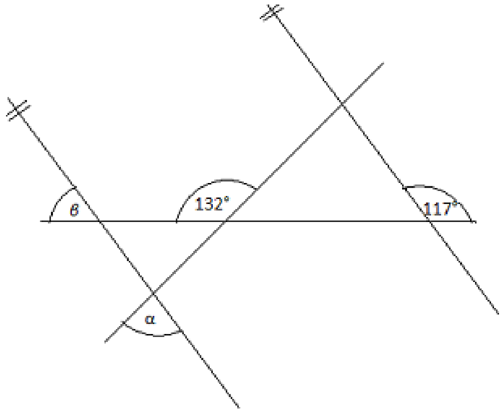
[a = 3 m]

G11 Vypočítejte obsah vybarvené plochy. Výsledek zaokrouhlete na setiny.



[2,43 dm^2]

G12 Spočítejte velikost úhlu α a β.



[α = 69°; β = 63°]

G13 Bazén ve tvaru kvádru, kde rozměry dna jsou a = 3 m, b = 5 m, je naplněn 22,5 m^3 vody, což odpovídá 83% zaplnění.

a) Kolik vody se maximálně vejde do bazénu?

b) Jak je bazén hluboký při úplném napuštění?

(Výsledky zaokrouhlete na jedno desetinné místo) [**a)** 27,1 m^3; **b)** 1,8 m]

G14 Při havárii uniklo z tankeru do moře 20 tun ropy. Na mořské hladině se vytvořila kruhová skvrna tlustá 2cm. Vypočítej, jakou plochu ropa zakryla. Předpokládej, že hustota ropy je 850 kg/m^3. Zaokrouhlete na celá čísla. (π = 3,14) [1176 m^2]

2.3.4 Nestandardní aplikační úlohy a problémy

A1: Doplňte následující magické čtverce, jestliže v magických čtvercích jsou čísla:

a) od 11 do 19

18	**11**	**16**
		12

b) od 10 do 25

10	**24**		
21	**15**		**18**
17		**20**	
	12		**25**

18	11	16
13	15	17
14	19	12

10	24	23	13
21	15	16	18
17	19	20	14
22	12	11	25

A2 Doplňte následující číselné řady:

a) $3; \frac{5}{2}; \frac{7}{3}; \frac{9}{4}; ?$

b) $\frac{m-1}{m}; \frac{m-2}{m+1}; \frac{m-3}{m+2}; ?$

c) 1, 3, 9, 27, ?

$\left[a)\frac{11}{5}; b)\frac{m-4}{m+3}; c)81 \right]$

A3 Mamince by trvalo připravit oslavu synových narozenin 4 hodiny. Kdyby tu samou oslavu chystal tatínek, trvalo by mu to 5 hodin. Jak dlouho jim bude trvat připravit oslavu společně?

[2 hod 13 min]

A4 Panu Novákovi při záplavách natekla voda do sklepa. Pokud by vodu odčerpával pouze svým čerpadlem, odčerpával by ji 14 hodin. Soused pana Nováka vlastní výkonnější čerpadlo, které by vodu ze sklepa samo vyčerpalo za 8 hodin, půjčil mu ho však až poté, co si vyčerpal vodu ze svého sklepa, tj. po pěti hodinách. Jak dlouho bude panu Novákovi trvat odčerpat všechnu vodu ze svého sklepa, jestliže pět hodin odčerpává pouze svým čerpadlem a poté zapojí obě čerpadla? [8 hod 16 min]

2.4 Vstupní test

Vstupní test měl ověřit dosavadní znalosti žáků z matematiky. Nejprve jsem vytvořila první verzi. Při vytváření tohoto testu jsem se snažila zařadit úlohy, se kterými by se žáci mohli setkat u přijímacích zkoušek na SŠ, zároveň jsem však musela respektovat ŠVP dané školy a dosavadní znalosti žáků. Do první verze testu jsem zařadila sedm otázek.

První příklad se týkal největšího společného dělitele a nejmenšího společného násobku. Tento příklad jsem zařadila, neboť se domnívám, že je to základ pro počítání se zlomky a pozdější počítání s lomenými výrazy. Tudíž znalostí tohoto tématu si žáci ušetří práci při počítání velkého počtu úloh, kde se počítá s výrazy a se zlomky. Také s úlohou typu: Určete nejmenší společný násobek či největšího společného dělitele se žáci mohou setkat v přijímacích testech středních odborných škol.

Druhý příklad jsem věnovala výrazům. Přestože jsem v přijímacích testech našla pouze zadání s lomenými výrazy, do vstupního testu jsem zadala rozklad mnohočlenu na součin. Žáci se totiž s lomenými výrazy poprvé setkávají až na začátku devátého ročníku. Tudíž lomené výrazy poznali až v průběhu aplikace souboru příkladů a mohly být zařazeny do výstupního testu.

Třetí a čtvrtý příklad byl věnován lineárním rovnicím. Ve třetím příkladu měli žáci řešit zadanou lineární rovnici. V příkladu čtvrtém měli lineární rovnici sestavit na základě textu slovní úlohy a vyřešit ji. Opět nebylo možné zadat úlohu, kde se vyskytují lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli nebo soustava dvou lineárních rovnic, neboť je to podle ŠVP opět učivo až devátého ročníku.

Pátý příklad jsem věnovala zpracovávání dat, kdy žáci měli pouze doplnit tabulku četností, spočítat procentuální zastoupení a aritmetický průměr. V této úloze jsem si chtěla ověřit, zda žáci umí ze zadání vytáhnout více dat, dopočítat data chybějící a dále s těmito daty pracovat.

Jako **šestý příklad** jsem zařadila výpočet stěnové úhlopříčky krychle. Tato úloha tak měla ověřit, jestli jsou žáci schopni v podobných příkladech aplikovat Pythagorovu větu a vůbec si představit, co mají počítat.

Poslední, sedmý příklad jsem věnovala konstrukční úloze. Zaměřila jsem ji na učivo 6. ročníku, a to na kružnici vepsanou. Zajímalo mě, jestli jsou žáci schopni provést všechny čtyři body řešení. (první verze testu viz příloha 1 s. 131).

Pro ověření, jestli je možné, aby žáci 9. ročníku zvládli vypracovat daný test za 40 minut, jsem test zadala žákyni 9. ročníku z jiné školy (vypracovaný test viz příloha 1 s.131). Při jejím zpracování se ukázalo, že zařazení konstrukční úlohy není vhodné z důvodu časové náročnosti (náčrtek, postup konstrukce, konstrukce, diskuze) a potřeby pomůcek, které ač by měly být ve výbavě každého žáka, často žákům chybí (rýsovací potřeby). Proto jsem konstrukční úlohu z příkladu 7 nahradila početní logickou geometrickou úlohou. Konstrukčním úlohám bych se pak věnovala v budoucnosti. Další nevýhodou se ukázalo, že příklady 3 a 4 se věnovaly stejnému tématu, a to lineárním rovnicím. Tudíž jsem příklad 3 vynechala a zanechala pouze příklad 4, který byl zajímavější, neboť si zde žák musel rovnici sám sestavit.

Dále jsem před zadáním vstupního testu konzultovala jeho obsah s paní učitelkou, která ve třídě 9. A, kde jsem test chtěla aplikovat, učí matematiku. Požádala mě, ať zaměním příklad 2, ve kterém měli žáci rozložit výraz na součin, za pouhé sčítání a odčítání výrazů. Výrazy jsou totiž pro žáky velmi náročným tématem a tento příklad by pro ně byl bez předešlého opakování 100% neúspěchem. Zaměnila jsem tedy na její žádost příklad za sčítání a odčítání výrazů, abych mohla pozorovat, zda alespoň u jednoduššího příkladu někteří žáci dojdou ke správnému řešení.

I druhou verzi testu jsem nejprve vyzkoušela na žákyni 9. ročníku z jiné ZŠ (viz příloha 2 s. 133) a následně jsem ji aplikovala na celou třídu. (finální verze testu viz kapitola 2.4.1 str. 108)

2.4.1 Vstupní test pro 9. ročník

Délka testu: 40 minut

Pomůcky: Psací potřeby, kalkulačka

PŘÍKLAD 1: Určete nejmenší společný násobek a největší společný dělitel čísel 8910 a 2970.

PŘÍKLAD 2: Vypočítejte: $5x^2 + 3x^2y + 2y – (3x^2 – 2\,x^2y + 6y)$

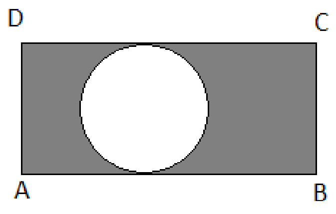
PŘÍKLAD 3: Matka je 5x starší než její syn. Za 15 let bude matka 2x starší než její syn. Kolik je matce a kolik je synovi?

PŘÍKLAD 4: V 8. A je 25 žáků, 20 % žáků dostalo ze vstupního matematického testu hodnocení 1, čtyři žáci dostali hodnocení 3, tři žáci dostali hodnocení 4 a jeden žák dostal hodnocení 5. Doplň následující tabulku a urči průměrnou známku třídy.

hodnocení	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
počet žáků					1
počet žáků v %	20				

PŘÍKLAD 5: Spočítejte délku stěnové úhlopříčky krychle ABCDEFGH s délkou hrany 5 cm. Výsledek zaokrouhlete na 2 desetinná místa. Proveďte náčrtek.

PŘÍKLAD 6: Do obdélníka ABCD je vepsána kružnice *k* (viz obrázek). Jaký je obsah vybarvené plochy, je-li *a* = 4 cm a *b* = 2 cm?



BONUSOVÝ PŘÍKLAD: Doplňte magický čtverec tak, aby ve čtverci bylo každé číslo 1 až 9 a součet čísel ve všech řádcích, sloupcích a úhlopříčkách byl stejný.

		8
7	**5**	
2		

[**1)** D(8910,2970) = 2970, n(8910, 2970) = 8910; **2)** $2x^2 + 5x^2y - 4y$; **3)** Matce je 25 let a synovi 5 let.; **4)** $\overline{x} = 2{,}32$; **5)** 7,07 cm; **6)** 4,86 cm^2

4)

hodnocení	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
počet žáků	5	12	4	3	1
počet žáků v %	20	48	16	12	4

Bonusový příklad:

6	1	**8**
7	**5**	3
2	9	4

2.5 Dotazník

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Aplikováno na: Základní škola, Školní 1803, 413 01 Roudnice nad Labem

Milí žáci,

chtěla bych Vás požádat o vyplnění dotazníku k mé diplomové práci, týkající se přípravy žáků k přijímacím zkouškám na SŠ. Tento dotazník použiji k ověření svých hypotéz a přizpůsobení aplikační fáze diplomové práce vašim potřebám. Tento dotazník je **anonymní**.

Děkuji Bc. Zdeňka Horáková

1) Jste MUŽ – ŽENA.
2) Budete skládat přijímací zkoušky na SŠ z matematiky? ANO – NE – NEVÍM
3) Připravujete se ve svém volném čase na přijímací zkoušky z matematiky? ANO – NE

4) Na posledním vysvědčení z matematiky jste měl(a) hodnocení:

a) Výborně
b) Chvalitebně
c) Dobře
d) Uspokojivě
e) Neuspokojivě
f) Nechci uvádět

5) Která z následujících témat jsou pro vás obtížná?

a) Rovnice
b) Úpravy a počítání s mnohočleny
c) Výpočty obvodů a obsahů geometrických obrazců
d) Výpočty objemů a povrchů těles
e) Slovní úlohy na právě probírané téma
f) Kombinované úlohy
g) Mocniny a odmocniny
h) Zpracování dat zadaných graficky (vyčíst hodnoty, vypočítat průměrnou hodnotu atd.)
i) Konstrukční geometrické úlohy
j) Jiná témata (doplňte jaká)

....

....

6) Která z úloh ve vstupním testu pro vás byla nejobtížnější, uveďte proč.

a) Příklad 1: Nejmenší společný násobek a největší společný dělitel.
b)Příklad 2: Sčítání a odčítání mnohočlenu.
c) Příklad 3: Určení věku syna a matky.
d) Příklad 4: Doplnění tabulky + určení průměrné známky 8. A z matematiky.
e) Příklad 5: Výpočet délky stěnové úhlopříčky v krychli ABCDEFGH.
f) Příklad 6: Výpočet obsahu vyznačené plochy.
g) Bonusový příklad: Magický čtverec.

....

....

....

7) Která probíraná témata matematiky jsou pro vás nejsnadnější?

....

....

8) Kterému tématu matematiky byste v hodinách věnovali více času na procvičení? Uveďte proč.

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

2.6 Výstupní test

Výstupní test jsem aplikovala na konci své práce s žáky 9. ročníku ZŠ. S těmito žáky jsem pracovala po dobu pěti týdnů, kdy jsme spolu měli každý týden 4 hodiny matematiky. V hodinách jsem se snažila v rámci možností ŠVP dané školy aplikovat svou práci, kdy jsem do hodin zařazovala příklady z uvedeného souboru (viz kapitola 2.2 str. 25 a kapitola 2.3 str. 97). Již na začátku praxe jsem si všimla, že žáci neumějí a neradi řeší slovní úlohy. Jakmile není zadán příklad, kde zadání zní: „Vypočítejte: konkrétní příklad“ jsou žáci líní nad tímto úkolem vůbec přemýšlet, neumějí si nakreslit náčrtek a vůbec si uvědomit, co mají počítat. V hodinách jsem se tedy snažila zařazovat více slovních úloh, neboť přijímací testy na SŠ jsou zaměřeny právě na aplikaci osvojených vědomostí.

Výstupní test obsahuje 6 příkladů a jednu bonusovou úlohu stejně jako test vstupní.

První úlohu jsem věnovala opět nejmenšímu společnému násobku a nejmenšímu společnému děliteli, neboť se domnívám, že je to základ pro počítání se zlomky a lomenými výrazy. Této problematice jsme se také krátce věnovali v úvodu sčítání a odčítání lomených výrazů.

Druhý příklad je věnován určení podmínek, za kterých má výraz smysl. Tento příklad jsem zvolila, neboť určení podmínek existence je součástí každého příkladu obsahující výrazy. Pro žáky byla tato problematika velmi obtížná, neboť se zde poprvé setkali s nerovností. Neustálým problémem bylo, že nemohli pochopit, že násobím-li výraz 0, vyjde mi vždy nula, tudíž musí být každý z činitelů ve jmenovateli nenulový.

Příklad číslo tři je věnován slovní úloze, ve které je skrytá lineární rovnice. Obdobným úlohám jsme se v hodinách věnovali a byly i součástí průběžného testu. Pro žáky je sestavení rovnice opět velmi obtížné. Někteří žáci jsou schopni dojít k řešení logickou úvahou, ale sestavení rovnice nebyl ve vstupním testu schopen nikdo. Proto jsem podobnou úlohu zařadila znovu, abych zjistila, jestli u řešení tohoto typu úloh došlo k zlepšení. Jiný typ slovních úloh vedoucí k sestavení lineární rovnice nebyl s žáky probrán, a tedy nebyl zařazen.

Příklad číslo čtyři je zde zařazen z důvodu, že žáci neumějí pracovat s daty, neumějí je zpracovat a vyvodit z nich nějaké závěry. K této problematice jsme se při společném opakování sice nedostali, ale domnívám se, že zařazení tohoto příkladu je přesto vhodné. Je to příklad, nad kterým budou ochotni přemýšlet a pracovat na něm i méně úspěšní žáci (i když možná neúspěšně), neboť se jedná o doplnění tabulky, což se na první pohled jeví žákům jako snadné.

Pátý příklad v sobě skrývá Pythagorovu větu. Slovní úlohy, ve kterých mají žáci objevit Pythagorovu větu, byly součástí několika hodin. Ovšem opět jsem narazila na to, že žáci neumí Pythagorovu větu aplikovat v praktických příkladech. Zmátlo je i jen jiné označení trojúhelníku než ABC. V hodinách jsem se tak snažila počítat s nimi reálné slovní úlohy, kdy jsme si nejprve nakreslili náčrtek, našli pravoúhlý trojúhelník a aplikovali Pythagorovu větu. Do výstupního testu jsem tuto úlohu tedy zařadila, abych si ověřila, jestli alespoň nějaký malý základ pro řešení těchto úloh v paměti žáků zůstal.

Příklad číslo šest v sobě opět skrývá Pythagorovu větu a zároveň vztah pro obsah trojúhelníka. Příklad jsem zařadila, neboť něco podobného jsem s žáky řešila v hodině a vzorec pro obsah trojúhelníka je tedy jediný, který jsme spolu používali. Vůbec jsem si netroufla zařadit jiný rovinný obrazec, neboť pokud s žáky nebyl zopakován, domnívám se, že si ho nebudou pamatovat.

Před zadáním testu celé třídě, jsem test nejprve opět aplikovala na žákyni 9. ročníku z jiné ZŠ (viz. příloha 3 str.135) abych si ověřila, že je časově reálné vypracování testu během 40 minut.

2.6.1 Výstupní test pro 9. ročník

Délka testu 40 min.

Pomůcky: psací potřeby, kalkulačka

PŘÍKLAD 1: Určete nejmenší společný násobek a největší společný dělitel čísel 420 a 2310.

PŘÍKLAD 2: Určete podmínky, za kterých má následující výraz smysl: $\frac{a^2+3}{3a^2-a}$

PŘÍKLAD 3: Matce je 24 let, dceři 4 roky. Za kolik let bude matka 3x starší než její dcera?

PŘÍKLAD 4 : V meteorologické stanici naměřili v dvaceti po sobě jdoucích letech dne 1. 4. následující teploty: 14°C; 18°C; 16°C; 16,5°C; 15°C; 15,6°C; 10,8°C; 14°C; 16,5°C; 15°C; 16,5°C; 10°C,8°C; 11°C, 16,5°C;18°C; 14°C; 15,6°C; 11°C; 10,8°C. Jaká je průměrná teplota teplot za posledních 20 let dne 1.4.? Doplňte tabulku.

teplota (°C)	počet dní, ve kterých byla teplota naměřena

Průměrná teplota= ……………………………...…

PŘÍKLAD 5: Pyramida v Egyptě se čtvercovou podstavou je vysoká 145 m. Výška její stěny je 1850 dm. Spočítejte délku hrany podstavy.

PŘÍKLAD 6: Vypočítejte obsah rovnostranného Δ ABC s délkou strany a = 6 cm**.**

BONUSOVÝ PŘÍKLAD: Doplňte následující řady:

$\frac{a}{2};\frac{a-1}{4};\frac{a-2}{8};\frac{a-3}{16};?$

[**1)** D(420, 2310) = 210, n(420, 2310) = 4620; **2)** $a \neq 0 \wedge a \neq \frac{1}{3}$; **3)** za 6 let; **4)** 14,14°C; **5)** 2298 dm; **6)** 15,6 cm^2;

Bonusový příklad: ; $\frac{a-4}{32}$]

III. Výzkumná část

3.1 Obecné údaje

Ve výzkumné části diplomové práce jsem chtěla ověřit, že aplikací souboru 2.2 a souboru 2.3 si žáci zopakují a upevní znalosti potřebné u přijímacích zkoušek na SŠ z matematiky. Nejprve jim byl zadán Vstupní test (viz kapitola 2.4.1. str. 108), na který navazoval krátký dotazník (2.5 str. 109). Po vyhodnocení Vstupního testu a dotazníku jsem přešla do procvičovací fáze, kde jsem se zaměřila na rozvoj problematiky, která se v testu zdála jako nejobtížnější. Po ukončení procvičování žáci absolvovali další tzv. Výstupní test (viz. 2.6.1. str. 112). Tento test obsahoval úlohy tematicky podobné Vstupnímu testu a zároveň zohledňoval procvičovací fázi a ŠVP dané základní školy. Očekávala jsem, že výsledky Výstupního testu budou o poznání lepší, než výsledky Vstupního testu.

3.2 Výzkum

Svůj výzkum jsem provedla na ZŠ v Roudnici nad Labem, Školní 1803, 413 01 při souvislé pedagogické praxi ve třídě 9. A v termínu od 12. 9. 2011 – 14. 10. 2011. Témata vstupního testu jsem zvolila podle toho, co by již žáci měli znát, a výskytu v různých obměnách v přijímacích testech z matematiky (proto v testu chybí některá témata, která se velmi často v přijímacích testech na SŠ vyskytují, ale žáci je budou probírat až v průběhu devátého ročníku). Tato témata jsou zařazena a procvičena v kapitole 2.2 a následně jsou další příklady s výsledky v kapitole 2.3.

3.2.1 Aplikace vstupního testu

Vstupní test jsem zadala na hodině matematiky ve třídě 9. A na ZŠ v Roudnici nad Labem, Školní 1803 a to dne 15. 9. 2011. Žákům jsem vysvětlila, že daný test mi pomůže při zpracování mé diplomové práce a zároveň bude sloužit i jim, aby si udělali přehled o svých dosavadních matematických vědomostech. Jelikož nepředcházelo žádné opakování a žáci ani nebyli seznámeni s tím, že je čeká nějaký test, oznámila jsem jim, že test nebude klasifikován. Klasifikace měla proběhnout pouze u testů, jejichž hodnocení by bylo výborně.

Žáky jsem také upozornila, že i přesto, že většina z nich možná bude přijata na SŠ bez přijímacích zkoušek z matematiky, bez určitých matematických znalostí se neobejdou a středoškolští učitelé matematiky je po nich budou od začátku vyžadovat. Z reakcí žáků bylo možné usoudit, že se rádi zapojí. Rozdala jsem tedy každému respondentovi okopírované zadání testu (viz. 2.4.1 str. 108) a prázdný papír na výpočty. Žáci se ochotně pustili do vyplňování testů.

Ve třídě nastalo ticho, jak všichni žáci soustředěně pracovali na svých testech. Ke konci hodiny jsem žákům rozdala i dotazníky (viz kapitola 2.5 str. 109). Žáci už v tuto chvíli pouze kontrolovali, co napsali do testů, a ve zbytku hodiny vyplnili dotazník.

3.2.2 Aplikace dotazníku

Dotazník byl zadán k vyplnění na hodině matematiky ve třídě 9. A na ZŠ v Roudnici nad Labem při souvislé pedagogické praxi ve stejné hodině jako Vstupní test a to z důvodu, aby si žáci pamatovali, která z úloh jim přišla jako nejobtížnější a mohli správně přiřadit své odpovědi.

3.2.3 Procvičovací fáze

V procvičovací fázi jsem se snažila s žáky zopakovat problémové učivo z Vstupního testu, zároveň jsem však musela žákům 9. ročníku předávat i nové vědomosti, se kterými se v průběhu svého studia ještě nesetkali a pravděpodobně se s nimi setkají u přijímacích testů z matematiky (lomené výrazy, soustavy lineárních rovnic a další učivo 9. ročníku apod.). Moje aplikace souboru byla do určité míry omezena i ŠVP dané školy.

V procvičovací fázi jsme se hodně věnovali procvičování mnohočlenů (kapitola 2.3.1 příklady 25, 26, 27), počítání s lomenými výrazy (kapitola 2.3.1 příklady 28, 29), lineárním rovnicím (kapitola 2.2.1.5.1 příklady 1,2,3; kapitola 2.3.1 příklady 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21) a Pythagorově větě (kapitola 2.2.4.2 příklad 5; kapitola 2.3.3 příklady 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) neboť tato témata byla naplánovaná v tematickém plánu, jehož jsem se musela držet. V úvodech hodin jsem pak v rámci rozcvičky zadávala příklady z ostatních oblastí (kapitola 2.2.1.1 vzorový příklad, kapitola 2.2.1.2 vzorový příklad, kapitola 2.2.4.1 příklad 1,2; kapitola 2.2.4.2 příklad 5 a část příkladu 3; kapitola 2.2.4.4 příklad 1).

V procvičovací fázi jsem si všimla, že žáci s velkou nevolí řeší slovní úlohy. Přestože většina z nich je schopna vyřešit bez problémů lineární rovnici, jakmile jim je zadána formou slovní úlohy, vzdávají řešení dříve, než se o ně alespoň pokusí. Z textů si neumí vytáhnout to podstatné a na základě toho rovnici sestavit. Řešení slovních úloh je tak velmi neoblíbené a je velmi těžké žáky dovést k tomu, aby se nad textem zamysleli a alespoň se pokusili o řešení. Není to jen u úloh vedoucích k lineárním rovnicím, ale obecně u slovních úloh na cokoliv. Proto jsem během praxe zařazovala slovní úlohy, všude kde to bylo možné, neboť se domnívám, že není důležité jen umět něco spočítat, ale umět to přenést i do praktického života.

3.2.4 Aplikace výstupního testu

Výstupní test jsem zadala dne 13. 10. 2011 na ZŠ Roudnice nad Labem, Školní 1803 v hodině matematiky ve třídě 9. A. Tato hodina byla předposlední hodinou, kterou jsem zde vyučovala v rámci souvislé pedagogické praxe.

Výstupní test jsem žákům den předem nahlásila, aby si nenosili sešity a učebnice a místo toho si přinesli kalkulačky.

Hned po zvonění byli žáci připraveni k samostatné práci. Nejprve jsem je seznámila s tím, proč vůbec tento test píší, požádala jsem je o spolupráci a vysvětlila jim, že i pro ně samé může být tento test jakýmsi srovnáním jejich dosavadních matematických znalostí. Z počátku byli trochu vystrašeni z možné klasifikace testů, ale já byla s paní učitelkou domluvena, že budou ohodnoceni jen ti nejlepší žáci. S tímto rozhodnutím jsem žáky seznámila ještě před začátkem samostatné práce.

Hned po rozdání testů se ve třídě nejprve ozvalo „naříkání“, neboť žákům se nelíbilo, že tam opět je nejmenší společný násobek a největší společný dělitel. Po napomenutí se ovšem žáci pustili do práce. Někteří žáci pracovali velmi poctivě a bylo na nich vidět, že se opravdu snaží, jiní pak test vyplňovali méně zodpovědně a s menší soustředěností.

Někteří žáci skončili s vypracováním testu ještě před koncem časového limitu. Nebylo to však proto, že test měli kompletně vypracovaný, ale už prý prostě nevěděli, jak dál.

3.3 Výsledky šetření

Následující kapitoly ukazují výsledky mého působení na žáky 9. ročníku. Testy dokazují, že výsledky žáků před a po aplikaci souboru se liší. Předpokládala jsem, že výsledky Vstupního testu budou horší než výsledky testu Výstupního (viz hypotéza H3 str. 24), což se mi také potvrdilo. Domnívám se, že mohlo dojít i k většímu zlepšení, ovšem bohužel mé působení na žáky bylo velmi krátké a do jisté míry bylo omezováno ŠVP a tematickými plány školy, a tak jsem nemohla věnovat úplně všem tématům odpovídající čas. Z výsledků průzkumu je však patrné, že aplikace části mého souboru vedla u většiny žáků ke zlepšení a tudíž i k zvýšení šancí v případných přijímacích zkouškách z matematiky (viz. kapitola 3.4 str. 123)

3.3.1 Výsledky průzkumu

3.3.1.1 Výsledky Vstupního testu

Žáci byli Vstupním testem překvapeni, neboť tento test nebyl nahlášen. U některých pomyšlení na to, že jdou psát test a nejsou připraveni, vyvolalo paniku. Ovšem hned v úvodu jsem žákům vysvětlila, že tento test bude použit při zpracování mé diplomové práce jako zdroj informací a že klasifikováni budou pouze žáci, kteří by dostali stupeň jedna. Žáci se velmi ochotně pustili do počítání, vypadali velmi svědomitě a pravděpodobně se cítili velmi důležitě. Po hodině se dokonce jeden žák přišel omluvit, že tam asi nic nemá, že si nemohl na nic vzpomenout.

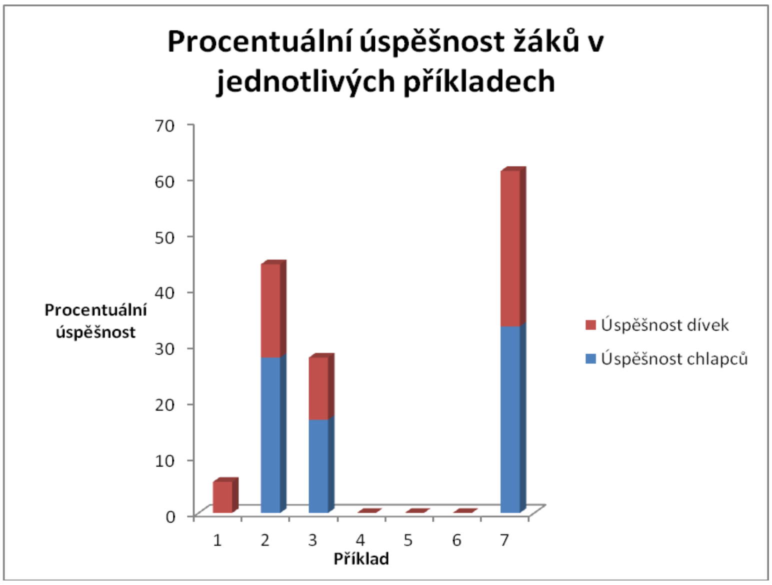
Vstupní test byl zadán 18 žákům, z toho bylo 11 chlapců a 7 dívek.

Jako nejúspěšnější se ukázal bonusový příklad (**magický čtverec**), který úspěšně vyplnilo 61,1 % žáků. Druhý nejúspěšnější byl příklad 2 (**rozdíl mnohočlenů**), který správně vyřešilo 44,4 % žáků.

Žáci byli nejméně úspěšní při řešení příkladů 5 (**výpočet stěnové úhlopříčky krychle**) a 6 (**výpočet obsahu části obdélníka**), neboť tento příklad nevyřešil ani jeden žák. V příkladu 4 (**zpracování dat**) se ukázalo, jak žáci nepozorně čtou zadání, neboť pouze doplnili hodnoty do tabulky a nedopočítali průměrnou hodnotu.

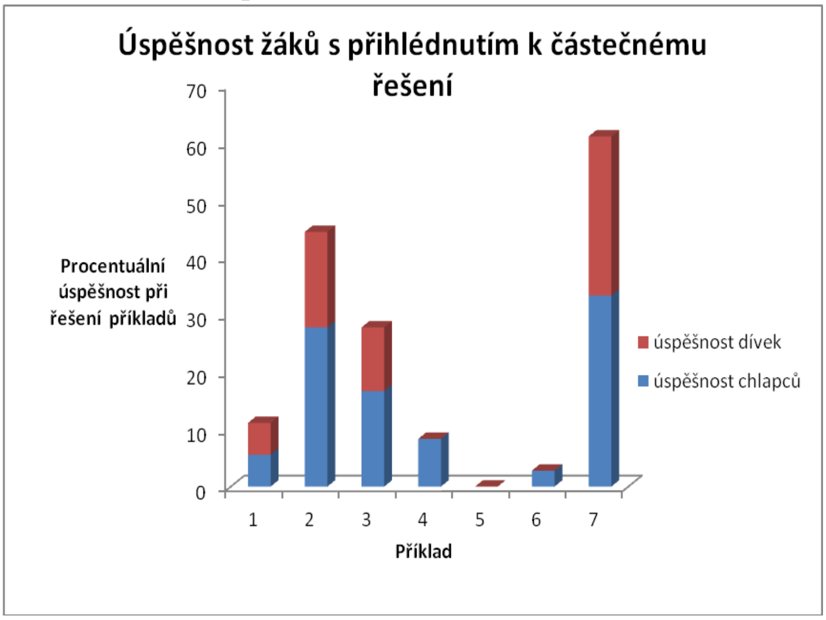
Procentuální úspěšnost žáků v jednotlivých příkladech je zaznamenána v grafu č. 1.

Graf 1 **Úspěšnost žáků**



Jelikož graf 1 znázorňuje pouze 100% úspěšnost při řešení jednotlivých příkladů, je zde přiložen graf 2, který znázoňuje i částečnou úspěšnost při řešení.

Graf 2 **Částečná úspěšnost žáků**



Graf č. 2 poskytuje přesnější informace o úspěšnosti řešení jednotlivých příkladů. Porovnáním grafů 1 a 2 zjistíme, že úspěšnost u příkladů 2, 3 a bonusového příkladu se nezměnila, tzn. ten, kdo tento příklad řešil, ho buď vyřešil zcela správně, nebo ho vyřešil úplně špatně, nevyskytlo se žádné částečné řešení. Naopak vidíme, že v příkladu 1, 4, 6 narostla po započtení částečného řešení úspěšnost chlapců, kteří příklad částečně vyřešili. Úspěšnost v příkladu 5 zůstala i po započtení částečného řešení nulová.

3.3.1.2 Vyhodnocení dotazníku

Dotazník jsem zadala spolu s testem žákům 9. A při souvislé pedagogické praxi na ZŠ Roudnice n.L, Školní 1803, 413 01, a to dne 14.9.2011. Dotazník tedy vyplňovalo 18 žáků, z toho 11 chlapců a 7 dívek. V dotazníku se ukázalo, že 77,8% žáků ještě neví, zda bude nebo nebude skládat přijímací zkoušky z matematiky na SŠ. Zbývajících 22,2 % žáků odpovědělo, že přijímací zkoušky z matematiky skládat nebudou. Celých 100% žáků odpovědělo, že se na případné přijímací zkoušky z matematiky do současné doby ještě nezačalo připravovat.

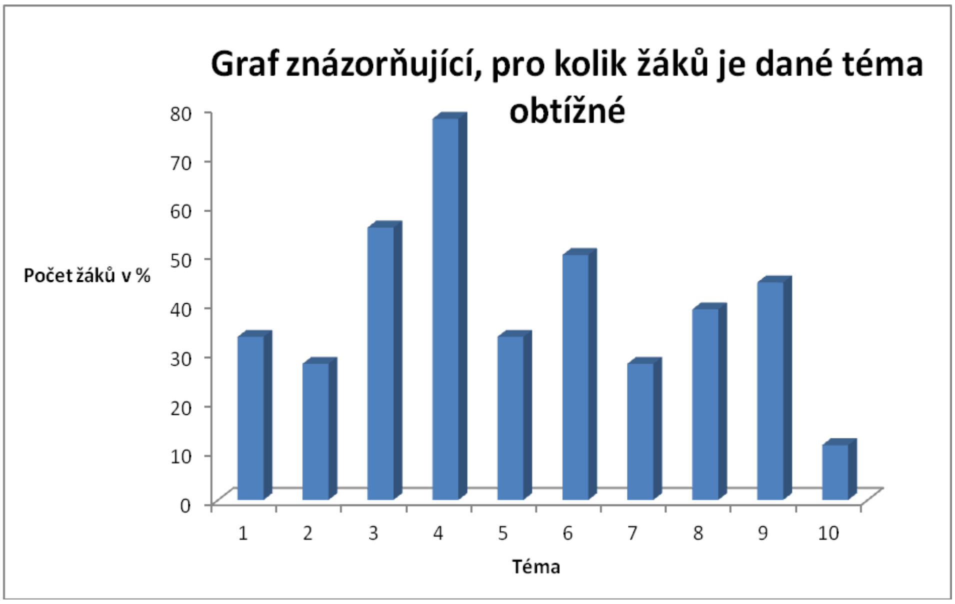
V dotazníku byla zařazena otázka týkající se prospěchu žáků na konci 8. ročníku. 27,8 % žáků odpovědělo, že v minulém ročníku byli na vysvědčení z matematiky klasifikováni stupněm výborně, 33,3 % chvalitebně, 22,2 % dobře, 11,1% dostatečně a 5,6% žáků odmítlo na otázku odpovědět.

V dotazníku jsem se žáků dále ptala, které z uvedených témat matematiky je pro ně obtížné. Vesměs uváděli více možností, našli se i tací, kteří uvedli, že je pro ně obtížné všechno.

Tabulka 4 Obtížnost témat z matematiky

Která témata, považují žáci za obtížná?	
Téma:	**Počet žáků v %**
1. Rovnice	33,3
2. Úpravy a počítání s mnohočleny	27,8
3. Výpočty obvodů a geometrických obrazců	55,6
4. Výpočty objemů a povrchů těles	77,8
5. Slovní úlohy na právě probírané téma	33,3
6. Kombinované úlohy	50,0
7. Mocniny a odmocniny	27,8
8. Zpracování dat	38,9
9. Konstrukční úlohy	44,4
10. Jiná témata	11,2

Graf 3 **Obtížnost témat z matematiky**



Na otázku, která z úloh vstupního testu pro ně byla nejobtížnější, odpověděli žáci následovně:

Tabulka 5 **Obtížnost příkladů**

Příklad	**Počet žáků v %, kteří hodnotili daný příklad jako obtížný**
1. Nsn(a,b), D(a,b)	16,7
2. Sčítání a odčítání mnohočlenu	16,7
3. Lineární rovnice- určení věku syna a matky	38,9
4. Zpracování dat	50,0
5. Výpočet délky stěnové úhlopříčky v krychli	66,7
6. Výpočet obsahu vyznačené části obdelníka	50,0
7. Bonusový příklad: Magický čtverec	22,3

Graf 4 **Obtížnost příkladů**

Přestože jsem se ptala pouze na nejobtížnější příklad, většina žáků zakroužkovala více odpovědí. Pravděpodobně se nemohli rozhodnout nebo pro ně mohlo být stejně obtížné řešení i několika příkladů. Celkově tvrdili, že test byl velmi obtížný. Žáci dostali možnost napsat, proč byl pro ně právě jimi zvolený příklad nejobtížnější. Ovšem tuto možnost využilo pouze minimum žáků. Ti co důvod uvedli, většinou psali, že na test nebyli připraveni a jelikož nebylo před testem opakování, tak si látku nepamatovali.

Žáci dále v dotazníku měli zhodnotit, který probíraný okruh matematiky je pro ně nejsnadnější a který nejobtížnější. Zde se ukázalo, že každý žák vnímá obtížnost látky jinak. 61,1% žáků uvedlo, že nejsnadnější je počítání s mnohočleny, ovšem hned dalších 16,6% žáků uvedlo, že je pro ně práce s mnohočleny obtížná, a tak by jí věnovali více času v hodinách. K mnohočlenům se vyjádřila většina žáků, a to pravděpodobně proto, že se mnohočleny zrovna v hodinách matematiky probíraly. Mezi snadnými tématy se pak objevily rovnice, mocniny a odmocniny, mezi těmi, co by se měly více procvičovat, se pak objevily opět rovnice, mocniny a odmocniny a navíc ještě procenta, obvody a obsahy, výpočty úhlopříček a vůbec výpočty prováděné v geometrii.

Žáci hodnotili úlohy 4,5,6 jako velmi obtížné, což souhlasí s výsledky Vstupního testu. Ovšem překvapující bylo, že hodnotili jako obtížnou i úlohu 3, ve které i někteří uspěli. Ovšem je fakt, že žáci v řešení vůbec nevyužili lineární rovnici a úlohu řešili intuitivně, metodou pokus omyl. Možná proto se jim úloha zdála jako obtížná, neboť netušili, jak svůj výsledek podložit nějakým výpočtem.

Údaje získané z dotazníku využiji k potvrzení svých hypotéz v kapitole 3.4 str. 123.

3.3.1.3 Výsledky Výstupního testu

Výstupní test byl zadán v 9. A na ZŠ Roudnice nad Labem. Testu se zúčastnilo 18 žáků, z nichž 11 bylo chlapců a 7 dívek. Test obsahoval 6 úloh a jeden bonusový příklad (viz. 2.6.1 str. 112).

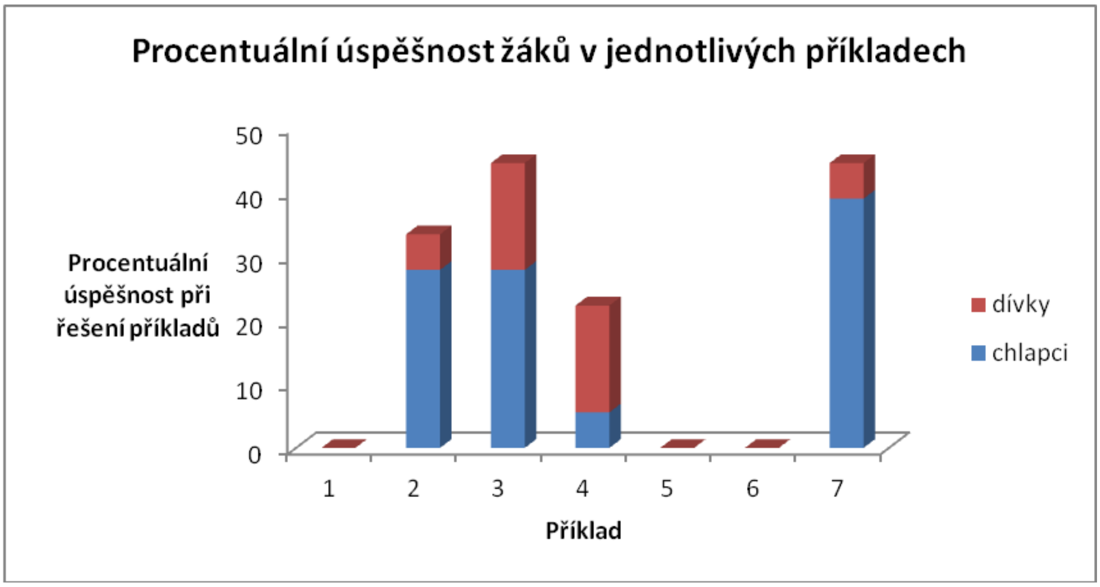
Žákům byl test den předem nahlášen. Již při prvním pohledu do zadání někteří žáci nebyli potěšeni. Nebylo to snad tím, že by takové úlohy nikdy neviděli, ale tím, že v zadání byla samá slovní úloha. Už v procvičovací fázi se totiž ukázalo, že slovní úlohy jsou pro žáky velmi obtížné, neumí si z nich vytáhnout potřebné informace a následně s nimi pracovat. Žákům mnohem více vyhovuje, když mají zadaný sloupec příkladů se zadáním:

„Vypočítejte!“ Dnešní doba však vyžaduje, aby žáci své vědomosti aplikovali v praxi, i v přijímacích testech se vyskytují z velké části slovní úlohy, a tak jsem i já do testu opět zařadila slovní formulace příkladů.

Jako nejúspěšnější se opět ukázal bonusový příklad, který úplně správně vyřešilo 44 % žáků, dalších přibližně 11% vyřešilo pouze jednu z řad. Druhým nejúspěšnějším příkladem byl příklad číslo tři (**slovní úloha vedoucí k lineární rovnici**), který správně vyřešilo stejně žáků jako bonusový příklad, ale pouze jeden žák ho pak vyřešil částečně (5,56%).

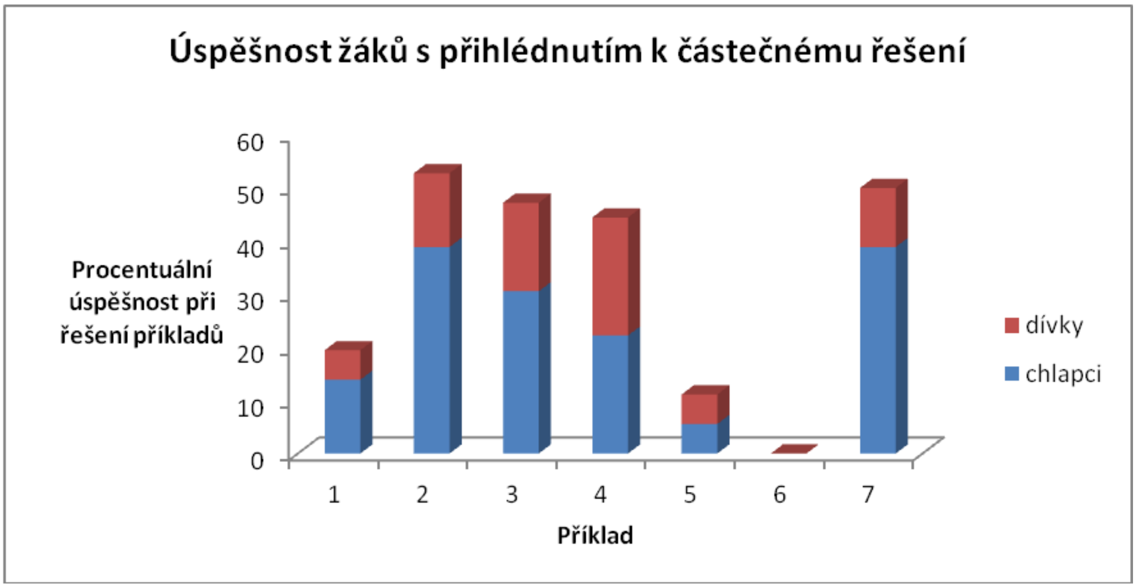
Naopak nejhůře dopadla úloha č. 6 (**výpočet obsahu rovnostranného trojúhelníka**), kterou správně nevyřešil vůbec nikdo, neboť si nepamatovali vzorec pro výpočet obsahu trojúhelníka. Druhá nejhorší byla úloha č. 5 (**výpočet délky hrany podstavy pyramidy se čtvercovou základnou**), u které mělo jen 11,1% žáků alespoň část řešení, zbytek byl neúspěšný. Výsledek příkladu číslo 5 byl překvapující, neboť obdobnou úlohu jsme začali řešit ve škole a žáci ji měli doma dopočítat za DÚ. Kupodivu úkol měli správně, ale v testu úlohu nevyřešili.

Graf 5 <u>Úspěšnost v příkladech</u>



Žáci velmi často příklad začali řešit, avšak nedořešili úplně správně nebo měli správně jenom část. Následující graf tedy zahrnuje i částečnou úspěšnost při řešení.

Graf 6 **Částečná úspěšnost**



Můžeme tedy pozorovat, že pro žáky byl Bonusový příklad ve Výstupním testu mnohem náročnější než v testu Vstupním.

Porovnáním grafu 5 a 6 zjistíme, že někteří žáci příklad rozpracovali, ale neuměli, nebo nestihli ho správně dořešit až do konce, tudíž jim muselo být započítáno jen částečné řešení. Částečné řešení se ve Výstupním testu objevovalo mnohem více než u testu Vstupního. Předpokládáme, že to bylo způsobeno tím, že látka byla v hodinách ve větší nebo menší míře procvičována, což mohlo v jistém směru ovlivnit úvahy o volbě řešitelské strategie a následně i úspěšnosti v řešení.

3.4 Ověření hypotéz

Hypotéza H1 zněla:

Za obtížné žáci považují geometrické úlohy, zejména v případě prostorové představivosti.

Hypotézu se podařilo ověřit. Výsledky šetření prokazují, že úlohy na prostorovou představivost jsou pro žáky opravdu velmi obtížné. To ukazuje například úspěšnost řešení příkladu 5 ve Vstupním testu (**délka tělesové úhlopříčky**),či příklad č. 5 ve Výstupním testu (**hrany podstavy pyramidy**), kdy velké množství žáků nebylo schopno správně provést ani správný náčrtek, což se negativně projevilo na úspěšnosti řešení této úlohy. Tuto hypotézu ověřují i výsledky dotazníku (viz kapitola 2.5 str.109), kde 77,8 % žáků označilo za obtížné výpočty objemů a povrchů těles a 55,6 % žáků označilo za obtížné i výpočty obvodů a obsahů geometrických obrazců.

Obtížnost těchto příkladů pro žáky se projevila i v procvičovací fázi, při řešení příkladů z kapitoly 2.3.3 str. 103 (příklad 1 – 8), kdy pro žáky byly tyto úlohy velmi obtížné i při vzájemné spolupráci při řešení.

Hypotéza H2 zněla:

Pro žáky je velmi problematické řešit komplexní úlohy.

Řešení úloh 5 (**délka stěnové úhlopříčky krychle, délka hrany pyramidy**) a 6 (**obsah části obdélníka, obsah rovnostranného trojúhelníka**) jak ve Vstupním, tak Výstupním testu je zaměřené na aplikaci poznatků z různých oblastí matematiky. Především se však využívá aplikace Pythagorovy věty a vlastnosti geometrických obrazců a těles. Z grafu č. 7 (viz dále) můžeme vidět, že právě tyto dvě úlohy byly v obou testech nejméně úspěšné. I při samotné aplikaci sbírky, při řešení podobných příkladů měli žáci velké problémy.

Na základě těchto zjištění byla tedy hypotéza H2 ověřena.

Hypotézu potvrzují i výsledky dotazníků, kde 50% žáků udává, že jsou pro ně kombinované úlohy obtížné.

Hypotéza H3 zněla:

Cílené řešení úloh ovlivňuje pozitivně rychlost a úspěšnost řešení. Toto se projeví ve vyšší úspěšnosti výstupního testu.

Hypotézu se podařilo zcela ověřit na základě získaných výsledků Vstupního a Výstupního testu. - Z grafu č. 7 (srovnání výsledků Vstupního a Výstupního testu viz dále) je vidět, že Vstupní test dopadl o poznání hůře než test Výstupní. - V úlohách 1, 2, 3, 4, 5 došlo ke zlepšení. V úloze 6 a bonusovém příkladu došlo naopak ke zhoršení. Kupodivu největší zlepšení nastalo v příkladě číslo 4, kde se výsledek zlepšil o 36%. Problematika zpracování dat s žáky nebyla procvičována, pouze při společném procházení Vstupního testu jsme si řekli, jak spočítáme aritmetický průměr. Druhé největší zlepšení nastalo v příkladu číslo 3, který se týkal lineárních rovnic. Tento výsledek, možná i o něco lepší, jsem očekávala, neboť této problematice jsem se dost věnovala v procvičovací fázi.

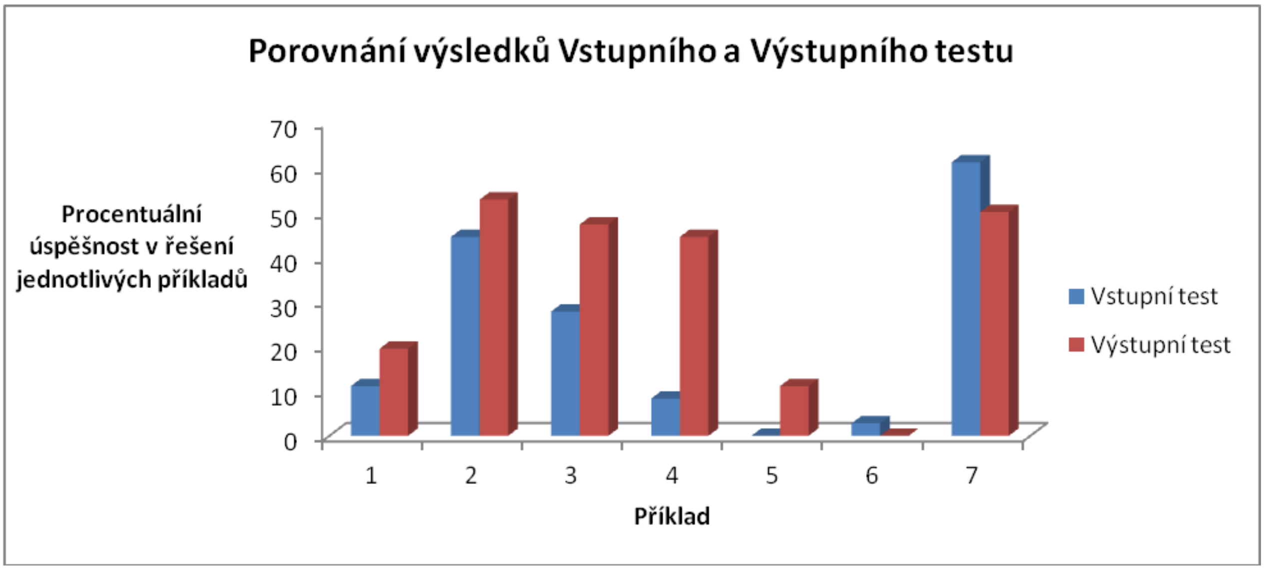
Zhoršení v příkladu č. 6 - je nepatrné, ve Vstupním testu vyřešil příklad č. 6 jeden žák částečně, ve Výstupním se to nepodařilo nikomu ani částečně. - Zhoršení v Bonusovém příkladu přičítáme tomu, že příklad byl rozdělen do dvou částí. V první části se objevila číselná řada, ovšem v části druhé byla řada, kde se vyskytovala neznámá *m* a pro žáky bylo mnohem obtížnější doplnit řadu, kde nemají pouze konkrétní čísla. Z tohoto důvodu dosáhla většina žáků pouze na částečné řešení. - Toto rozdvojení úlohy se pak negativně projevilo v celkovém hodnocení úlohy.

Hypotéza H4 zněla:

Bonusové příklady bývají často zadávány, aby žáci získali více bodů. Předpokládám tedy, že i v tomto případě se soustředí na jeho řešení a budou celkem úspěšní.

Žáci se opravdu soustředili na řešení Bonusového příkladu. Tento příklad jak ve Vstupním, tak Výstupním testu řešili ať už úspěšně či neúspěšně všichni žáci. Snížení procentuální úspěšnosti v této úloze jsem již odůvodnila u hypotézy H3. I přesto, že úspěšnost řešení této úlohy ve Výstupním testu oproti Vstupnímu testu klesla, je tato úloha v obou testech jednou z nejúspěšnějších. Hypotéza byla tedy získanými výsledky ověřena.

Graf 7 - <u>Srovnání výsledků Vstupního a Výstupního testu</u>



ZÁVĚR

Přijímacím řízením na střední školu si projde každý jedinec naší společnosti. Někteří si vyberou školu, kde přijímací řízení proběhne bez přijímacích zkoušek, jiní naopak musí přijímací zkoušky skládat. Tato práce měla pomoci právě těm žákům, kteří skládají přijímací zkoušky z matematiky, v jejich samostatné přípravě.

Cílem této práce tedy bylo sestavit soubor, který pomůže žákům v přípravě k přijímacím testům z matematiky, tento soubor aplikovat a zjistit úspěšnost žáků před a po aplikaci souboru. Zaměřila jsem se na soubor řešených příkladů, který obsahuje i základní definice, aby žák nemusel při studiu neustále odbíhat hledat teorii v jiných publikacích. U řešených příkladů jsem podrobně popsala zvolený postup tak, aby žák co nejsnadněji pochopil řešení. Po souboru řešených příkladů jsem zařadila soubor příkladů neřešených, kde si žák ověří, zda je schopen samostatného řešení.

Abych ověřila, že cíle diplomové práce byly opravdu splněny, aplikovala jsem část sbírky na vzorku žáků 9. ročníku. Zde jsem ověřila své hypotézy, že výsledky před aplikací souboru byly horší než výsledky po aplikaci souboru. Z časových důvodů jsem mohla aplikovat a tedy ověřit pouze část souboru, ale domnívám se, že pokud bych aplikovala celý soubor, zlepšily by se výsledky ve všech oblastech. Soubor budu dále využívat ve své praxi a na základě svých pozorování z praxe ho budu dále rozšiřovat a upravovat tak, aby co nejvíce odpovídal potřebám žáků a společnosti.

Tato práce neobsahuje konstrukční geometrické úlohy, neboť se jedná o oblast, které by mohla být věnována celá práce, a tedy je možné v budoucnu se tomuto tématu věnovat zvlášť.

Domnívám se, že práce je přehledně zpracovaná a její využití je možné i v době, kdy ne každý žák skládá přijímací zkoušky. Je možné ji využít k samostatnému opakování či jako inspiraci pro učitele matematiky. Je totiž velmi důležité si uvědomit, že i přesto, že se přijímací zkoušky z matematiky na SŠ často neskládají a žáci se tak na danou školu dostanou bez ověření svých matematických znalostí, budou středoškolští učitelé určitou úroveň znalostí očekávat a ve svých hodinách na ni budou navazovat. Pro každého žáka je určitě dobré si ověřit, kolik si toho pamatuje a zda zvládá očekávané vstupní nároky středních škol.

POUŽITÉ ZDROJE

[1] BĚLOUN, F.- CHYTILOVÁ, M.- KOLÁŘOVÁ, R.- PETERA, M.- VOJTÍK, J. *Tabulky pro základní školu*. 3. vydání. Praha: SPN, 1983. 224 s.

[2] HAVLÍKOVÁ, A. a kol. *Testy z matematiky 2006*. 1. vydání. Brno: Didaktis, 2005. 136 s. ISBN 80-7358-026-8.

[3] HUDCOVÁ, M.– KUBIČÍKOVÁ, L. *Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ, SOU a nástavbové studium.* 1. vydání. Praha: Prometheus, 2004. 415 s. ISBN 80-7196-165-5.

[4] KLŮFA, J.- COUFAL, J. *Matematika 1*. 1.vydání. Praha: Ekopress,2003. 222 s. ISBN 80-86119-76-9.

[5] MIKULČÁK, J. *Přehled učiva matematiky základní školy.*1.vydání. Praha: SPN, 1993. 258 s. ISBN 80-04-26357-7. Kapitola 4, Rovnice a soustavy rovnic, s. 108- 120.

[6] ODVÁRKO,O. KADLEČEK, J. *Matematika pro 9. ročník ZŠ*: 1.díl. 1.vydání. Praha: Prométheus, 2000. 88 s. ISBN80-7196-194-9.

[7] PERNÝ, J. *Přednášky Didaktiky matematiky*. Liberec: TUL, akademický rok 2010/2011.

[8] POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky*. 3. vydání. Praha: SPN, 1980. 628 s.

[9] SEDLÁČEK A KOL. *Slovník školské matematiky*, 1. vydání. Praha: SPN, 1981. 240 s.

[10] SIVOŠOVÁ, A. *Testy z matematiky pro 9. ročník základní školy.* 1. vydání. Mníšek pod Brdy: Educo, 1998. 72 s. ISBN 80-806162-01-X.

[11] ÚŘAD PRÁCE ČR . *Atlas školství- přehled středních škol a vybraných školských zařízení Ústecký kraj*.. Brno: P. F. art., 2011. ISBN 978-80-7348-990-8.

Internetové zdroje:

[Int 1] FRANTÍK, P. *Barevné stupnice* [online]. c2003, poslední revize 16.7.2007 [cit. 2011-09-06]. <http://kitnarf.webpark.cz/2003.07.stupnice/stupnice.htm>.

[Int 2] FUCHS, Eduard. Magické *čtverce aneb Od knihy I-T'ing k internetové současnosti* [online].c2004, poslední revize 14.4.2004 [cit. 2011-09-05].
< http://bart.math.muni.cz/~fuchs/Efuchs/historie_pdf/mactv.pdf>.

[Int 3] HÁJKOVÁ, J. *Poměr*. *Metodický portál: Digitální učební materiály* [online]. c 2010, poslední revize 25. 08. 2010, [cit. 2011-09-02]. <http://dum.rvp.cz/materialy/pomer-2.html>. ISSN 1802-4785.

[Int 4] HAVRLANT, L. 2006a. *Lineární funkce* [online]. c 2006, poslední revize 29.8.2011 [citováno 2011-08-29].<http://www.matweb.cz/linearni-funkce>.

[Int 5] HAVRLANT, L. 2006b. *Posloupnosti* [online]. c2006. poslední revise 5.9.2011 [cit. 2011-09-05]. <http://www.matweb.cz/posloupnosti>.

[Int 6] MACHÁŇOVÁ, Š. Slovní úlohy o společné práci 1. *Metodický portál: Digitální učební materiály* [online]. c2010, 26. 05. 2010, [cit. 2011-09-05]. <http://dum.rvp.cz/materialy/slovni-ulohy-o-spolecne-praci-1.html>. ISSN 1802-4785.

[Int 7] MARTIŠEK, D. *Algebraické výrazy* [online]. c2004, poslední revize 23. 5. 2004 [citováno 2011-08-19]. <http://www.zam.fme.vutbr.cz/~martisek/Vyuka%5CPrij%5Cskripta3.pdf>.

[Int 8] MŠMT, *Informace o změnách v přijímacím řízení na střední školy* [online]. c2012, poslední revize 12. ledna 2012 [citováno 2012-01-14]. <http://www.msmt.cz/file/19699>.

[Int 9] MŠMT, *Vyhláška č. 394/2008 Sb. o organizaci přijímacího řízení ke vzdělávání ve středních školách, ve znění pozdějších předpisů.* c2008, [citováno 2011-11-4]. <http://www.msmt.cz/vzdelavani/prijimani-ke-studiu-ve-strednich-skolach-v-roce-2009>

[Int 10] PROCHÁZKA, J. *Výklad- úhly* [online]. c2000, poslední revize 2.10.2000 [citováno 2011-08-31]. <http://it.pedf.cuni.cz/~proch/program/uhel.htm>.

[Int 11] PŘIKRYL, J. VLČEK, M. *Modulární aritmetika, Malá Fermatova věta, Čínská věta o zbytcích* [online]. c2008. 22.10.2008 [citováno 2011-08-24]. <http://euler.fd.cvut.cz/predmety/ma/files/ma-04-2008.pdf>.

[Int 12] SCIO, *Matematika 9. třída* [online]. c2004, 31.8.2011 [citováno 2011-08-31]. <http://www.scio.cz/1_download/pdf/04PZSS9_Ma_web.pdf>.

[Int 13] ŠIŘICKÁ, J. *Jak sestavit magický čtverec*. *Metodický portál: Digitální učební materiály* [online]. c2009. 01. 09. 2009, [cit. 2011-09-05].<http://dum.rvp.cz/materialy/jak-sestavit-magicky-ctverec-2.html>. ISSN 1802-4785.

[Int 14] VÝRUT, R. *Reálné funkce jedné reálné proměnné* [online]. c2008, poslední revize 11.10.2008 [citováno 2011-08-22]. <http://home.zcu.cz/~rvyrut/WWW-KMA/MS1/Kapitola_03.pdf>.

[Int 15] Výzkumný ústav pedagogický v Praze. *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [online]. c2007. [cit. 2011-07-19]. <http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_2007-07.pdf>

[Int 16] ŽEMLIČKA, J. *Euklidův algoritmus a konstrukce konečných těles* [online].c2007. 5.11.2007 [citováno 2011-08-18.] <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zemlicka/07-08/algi_1.pdf>.

[W1]WIKIPEDIA. *Největší společný dělitel* [online]. c1999, poslední revize 1.5.2011 [citováno2011-08-18]. <http://cs.wikipedia.org/wiki/Nejv%C4%9Bt%C5%A1%C3%AD_spole%C4%8Dn%C3%BD_d%C4%9Blitel >.

[W2] WIKIPEDIA. *Objem* [online]. c1999, poslední revize 1.8.2011 [citováno 2011-08-31]. <http://cs.wikipedia.org/wiki/Objem>.

[W3] WIKIPEDIA. *Obvod* [online]. c1999. poslední revize 16.6.2011[citováno 2011-08-31]. <http://cs.wikipedia.org/wiki/Obvod>.

[W4] WIKIPEDIA. *Obsah* [online]. c1999. poslední revize 31.8.2011 [citováno 2011-08-31]. < http://cs.wikipedia.org/wiki/Obsah>.

[W5] WIKIPEDIA. *Odmocnina* [online]. c1999, poslední revize 23.7.2011[citováno 2011-08-19]. <http://cs.wikipedia.org/wiki/Odmocnina>.

[W6] WIKIPEDIA. *Povrch* [online]. c1999, poslední revize 22.8.2011 [citováno 2011-08-31]. <http://cs.wikipedia.org/wiki/Povrch>.

PŘÍLOHY

P1 - Vyplněná první verze Vstupního testu

P2 - Zkušební aplikace Vstupního testu

P3 - Zkušební aplikace Výstupního testu

P4 - Ukázka Vstupního testu žáka

P5 - Ukázka vyplněného dotazníku

P6 - Ukázka Výstupního testu

Další ukázky Vstupních testů, dotazníků a Výstupních testů jsou součástí přiloženého CD.

Vstupní test pro 9. Ročník

Délka testu: 40 minut

Pomůcky: Rýsovací a psací potřeby, kalkulačka

PŘÍKLAD 1: Určete nejmenší společný násobek a největší společný dělitel čísel 8910 a 2970.

D(2970, 8910) = 2970   N = 270   n(2970; 8910) = 8910

PŘÍKLAD 2: Upravte následující výraz na součin : $9a^2c^2d - 25b^2c^2d$.

PŘÍKLAD 3: Vyřešte následující rovnici: $3x + 6 = 2 \cdot (5 - x)$

PŘÍKLAD 4: Matka je 5x starší než její syn. Za 15 let bude matka 2x starší než její syn. Kolik je matce a kolik je synovi? M-40 ✓ S-5 ✓

PŘÍKLAD 5: V 8. A je 25 žáků, 20 % žáků dostalo ze vstupního matematického testu hodnocení 1, čtyři žáci dostali hodnocení 3, tři žáci dostali hodnocení 4 a jeden žák dostal hodnocení 5. Doplň následující tabulku a urči průměrnou známku třídy.

100% .... 25 ž
20% x

hodnocení	1	2	3	4	5
počet žáků	5 ✓	12 ✓	4 ✓	3 ✓	1
počet žáků v %	20	48 ✓	16 ✓	12 ✓	4 ✓

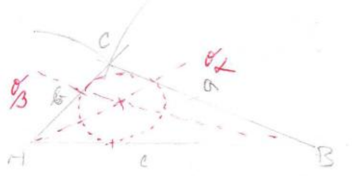
Průměrná známka

PŘÍKLAD 6: Spočítej délku stěnové úhlopříčky krychle ABCDEFGH s délkou hrany 5 cm. Výsledek zaokrouhlete na 2 desetinná místa. Proveďte náčrtek. $5^2 + 5^2 = 50$

7,10 cm   7,07 cm = $\sqrt{50} \doteq$ 7,10 cm

PŘÍKLAD 7: Narýsuj Δ ABC, je-li a = 4 cm, b = 2 cm, c = 5 cm . Do ΔABC narýsuj kružnici vepsanou.

- Střed kružnice vepsané je průsečík os úhlů γ, β, α



1) 8910 2970

8910
$2 \cdot 4455$
$5 \cdot 891$
$3 \cdot 297$
$9 \cdot 33$
$3 \cdot 3 \quad 3 \cdot 11$

2970
$2 \cdot 1485$
$5 \cdot 297$
$9 \cdot 33$
$3 \cdot 3 \quad 3 \cdot 11$

2) $9a^2c^2d - 25b^2c^2d = dc^2 \cdot (3a^2 - 5b^2)$
$= c^2d \cdot (9a^2 - 25b^2) = c^2d \cdot (3a-5b) \cdot (3a+5b)$

3) $3x + 6 = 2 \cdot (5 - x)$
$3x = 4 - 2x$
$5x = 4$
$x = \frac{4}{5}$

4) $5x + 15 = (15 - x)$??
$6x + 15 = 15$
$6x = 30$??
$x = 5$

$5 \times 5 = 25$
$25 + 15 = 40$

x ... věk syna
$5x + 15 = 2 \cdot (x + 15)$
$x = 5$ → věk matky $5 \cdot 5 = 25$

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Vstupní test

Délka testu: 40 minut

Pomůcky: Psací potřeby, kalkulačka

PŘÍKLAD 1: Určete nejmenší společný násobek a největší společný dělitel čísel 8910 a 2970.

N – 24 300 D – 2970

PŘÍKLAD 2: Vypočítejte: $5x^2 + 3x^2y + 2y - (3x^2 - 2x^2y + 6y)$

$2x^2 - x^2y + 8y$

PŘÍKLAD 3: Matka je 5x starší než její syn. Za 15 let bude matka 2x starší než její syn. Kolik je matce a kolik je synovi? Synovy je 5 let. Matce je 25 let.

PŘÍKLAD 4: V 8. A je 25 žáků, 20 % žáků dostalo ze vstupního matematického testu hodnocení 1, čtyři žáci dostali hodnocení 3, tři žáci dostali hodnocení 4 a jeden žák dostal hodnocení 5. Doplň následující tabulku a urči průměrnou známku třídy.

100% 25ž
20% ... x

hodnocení	1	2	3	4	5
počet žáků	5	12	4	3	1
počet žáků v %	20	48	16	12	4

∅ = 2,6

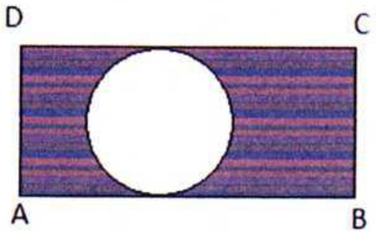
PŘÍKLAD 5: Spočítejte délku stěnové úhlopříčky krychle ABCDEFGH s délkou hrany 5 cm. Výsledek zaokrouhlete na 2 desetinná místa. Proveďte náčrtek. $5^2+5^2=50$

7,07cm $\sqrt{50} = 7{,}07$cm

PŘÍKLAD 6: Do obdelníka ABCD je vepsána kružnice *k* (viz obrázek). Jaký je obsah vybarvené plochy, je-li *a* = 4 cm a *b* = 2 cm?

O= 2 x 4+2
O= 10 cm²

asi 4cm²



BONUSOVÝ PŘÍKLAD: Doplňte magický čtverec tak, aby ve čtverci bylo každé číslo 1 až 9 a součet čísel ve všech řádcích, sloupcích a úhlopříčkách byl stejný.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

1)

8910
2 · 4455
5 · 891
9 · 99
3·3 3 · 33
3 · 11

2970
10 · 297
2 · 5 9 · 99
3·3 3 · 33
3 · 11

2) $5x^2 + 3x^2y + 2y - (3x^2 - 2x^2y + 6y) = 5x^2 + 3x^2y + 2y - 3x^2 + 2x^2y + 6y =$

$= \underline{\underline{2x^2 \quad x^2y + 8y}}$

3) $5x + 15 = 2\cdot(15 + x)$

$5x\cdot 5 = \underline{\underline{25}}$

$5x + 15 = \cancel{2}\cdot 30 + 2x \quad | -2x$

$3x + 15 = 30 \quad | -15$

$3x = 15$

$\underline{\underline{x = 5}}$ ✓

~~k odpovědi~~

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

VÝSTUPNÍ TEST PRO 9.ROČNÍK

Délka testu 40 min.

Pomůcky: psací potřeby, kalkulačka

1 **PŘÍKLAD 1:** Určete nejmenší společný násobek a největší společný dělitel čísel 420 a 2310.

0,5 **PŘÍKLAD 2**: Určete podmínky, za kterých má následující výraz smysl: $\frac{a^2+3}{3a^2-a}$

0,5 **PŘÍKLAD 3:** Matce je 24 let, dceři 4 roky. Za kolik let bude matka 3x starší než její dcera?

1 **PŘÍKLAD 4 :** V meteorologické stanici naměřili v dvaceti po sobě jdoucích letech dne 1.4. následující teploty: 14°C; 18°C; 16°C; 16,5°C; 15°C; 15,6°C; 10,8°C; 14°C; 16,5°C; 15°C; 16,5; 10°C,8°C; 11°C, 16,5°C;18°C; 14°C; 15,6°C; 11°C; 10,8°C. Jaká je průměrná teplota teplot za posledních 20 let dne 1.4.? Doplň tabulku.

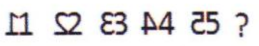
teplota (°C)	počet dní ve kterých byla teplota naměřena
14	3
15	2
15,6	2
16	1
16,5	4
18	2
10,8	2
10	1
8	1
11	2

Průměrná teplota= 14,14°C

0 **PŘÍKLAD 5:** Pyramida v Egyptě se čtvercovou podstavou je vysoká 145 m. Výška její stěny je 1850 dm. Spočítejte délku hrany podstavy.

0,5 **PŘÍKLAD 6:** Vypočítej obsah rovnostraného Δ ABC s délkou strany a = 6 cm.

1 **BONUSOVÝ PŘÍKLAD:** Doplňte následující řady:



$\frac{a}{2};\frac{a-1}{4};\frac{a-2}{8};\frac{a-3}{16};?$

1) 420 = 2 · 210, 210 = 3 · 70, 70 = 2 · 35, 35 = 5 · 7

2310 = 2 · 1155, 1155 = 5 · 231, 231 = 3 · 77, 77 = 11 · 7

$D(420, 2310) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$ ✓

$N(420, 2310) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 7 = 4620$ ✓

2) $\frac{a^2+3}{3a^2-a}$

$3a^2 - a \neq 0$

$a \cdot (3+a) \neq 0$

$a \neq -3 \;\wedge\; a \neq 0$ ✓

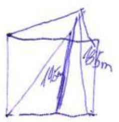
3) matce je 24 let
dceři jsou 4 roky

$$\cancel{24x + 4 = 3 \cdot (24 + 4x)}$$
$$\cancel{24x + 4 = 72 + 12x \quad / -12x}$$
$$\cancel{12x + 4 = 72 \quad / -4}$$
$$\cancel{12x = 68}$$
$$\cancel{x =}$$

$$24 + x = 3 \cdot (4 + x)$$
$$24 + x = 12 + 3x$$
$$12 + x = 3x$$
$$12 = 2x$$
$$\underline{\underline{6 = x}}$$

Slovní odpověď?

5)



$165^2 - 145^2 = 13\,200$

$\sqrt{13\,200} = 114$ m

· 2

délka hrany podstavy je 114m.

6)

$6^2-3^2=27$

$\sqrt{27} \doteq 5$

$\frac{6 \cdot 5}{2} = \underline{15cm^2}$

Obsah trojuhelníku je 15cm².

Špatně jednotky. Obsah měříme ve čtverečních jednotkách

Bonusový příklad:

$\frac{a}{2}; \frac{a-1}{4}; \frac{a-2}{8}; \frac{a-3}{16}; \frac{a-4}{32}$

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Vstupní test

Délka testu: 40 minut

Pomůcky: Psací potřeby, kalkulačka

PŘÍKLAD 1: Určete nejmenší společný násobek a největší společný dělitel čísel 8910 a 2970.

PŘÍKLAD 2: Vypočítejte: $5x^2 + 3x^2y + 2y - (3x^2 - 2\,x^2y + 6y)$

PŘÍKLAD 3: Matka je 5x starší než její syn. Za 15 let bude matka 2x starší než její syn. Kolik je matce a kolik je synovi?

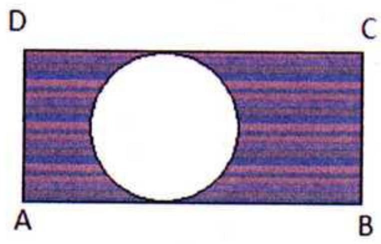
PŘÍKLAD 4: V 8. A je 25 žáků, 20 % žáků dostalo ze vstupního matematického testu hodnocení 1, čtyři žáci dostali hodnocení 3, tři žáci dostali hodnocení 4 a jeden žák dostal hodnocení 5. Doplň následující tabulku a urči průměrnou známku třídy.

hodnocení	1	2	3	4	5
počet žáků	5	12	4	3	1
počet žáků v %	20	~~40~~ 48	16	12	4

průměr. znám

PŘÍKLAD 5: Spočítejte délku stěnové úhlopříčky krychle ABCDEFGH s délkou hrany 5 cm. Výsledek zaokrouhlete na 2 desetinná místa. Proveďte náčrtek. 7,55cm // 7,07cm

PŘÍKLAD 6: Do obdelníka ABCD je vepsána kružnice *k* (viz obrázek). Jaký je obsah vybarvené plochy, je-li $a = 4$ cm a $b = 2$ cm?



BONUSOVÝ PŘÍKLAD: Doplňte magický čtverec tak, aby ve čtverci bylo každé číslo 1 až 9 a součet čísel ve všech řádcích, sloupcích a úhlopříčkách byl stejný.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

[redacted]

1) 8910 − 9 · 990 = 8910 = 990 : 9 = 110 : 10 = 11 = 18 = 27

2970 − 330 · 9 = 18 = 27

n(2970, 8910) = 8910

D(2970, 8910) = 2970

2) $5x + 3x^2y + 2y - (3x^2 - 2x^2y + 6y) = 5x + 3x^2y + 2y - 3x^2 + 2x^2y - 6y = 5x + 5x^2y - 4y - 3x^2$

Špatně opsané zadání

3) Matka 5x starší

15 2x

$5x = 15 + 2x \quad / -2x$

$5x - 2x = 15$

$3x = 15$

$x = 5$

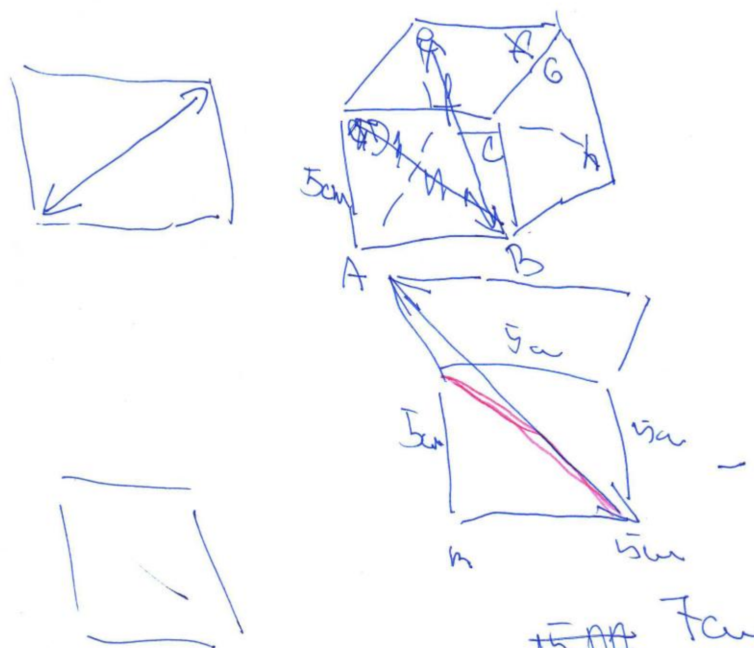
25 10??

Jak jsi přišel na 10 let? Vypočítal jsi 5 let!!

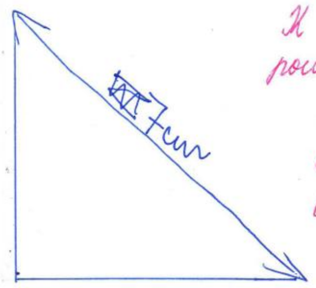
Matce je 25 let a synovi je 10 let.

4)

5)



~~15,00~~ 7cm



K výpočtu jsi neměl použít přibližný náčrtek, ale Pythagorovu větu.

$c^2 = a^2 + b^2$

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$c = \sqrt{5^2 + 5^2}$

$c \doteq 7{,}07$ cm

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI

FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Aplikováno na Základní škola, Školní 1803, 413 01 Roudnice nad Labem

Milí žáci,

chtěla bych Vás požádat o vyplnění dotazníku k mé diplomové práci, týkající se přípravy žáků k přijímacím zkouškám na SŠ. Tento dotazník použiji k ověření svých hypotéz a přizpůsobení aplikační fáze diplomové práce vašim potřebám. Tento dotazník je **anonymní**.

Děkuji .

Bc. Zdeňka Horáková

1) Jste MUŽ – ŽENA.
2) Budete skládat přijímací zkoušky na SŠ z matematiky? ANO – NE – NEVÍM
3) Připravujete se ve svém volném čase na přijímací zkoušky z matematiky? ANO – NE
4) Na posledním vysvědčení z matematiky jste měl(a) hodnocení:
   a) Výborně
   b) Chvalitebně
   c) Dobře
   d) Uspokojivě
   e) Neuspokojivě
   f) Nechci uvádět
5) Která z následujících témat jsou pro vás obtížná?
   a) Rovnice
   b) Úpravy a počítání s mnohočleny
   c) Výpočty obvodů a obsahů geometrických obrazců
   d) Výpočty objemů a povrchů těles
   e) Slovní úlohy na právě probírané téma
   f) Kombinované úlohy
   g) Mocniny a odmocniny

h) Zpracování dat zadaných graficky (vyčíst hodnoty, vypočítat průměrnou hodnotu atd.)

i) Konstrukční geometrické úlohy

j) Jiná témata (doplňte jaká ....

....)

6) Která z úloh ve vstupním testu pro vás byla nejobtížnější, uveďte proč.

a) Příklad 1: nejmenší společný násobek a největší společný dělitel.

b)Příklad 2: Sčítání a odčítání mnohočlenu.

c) Příklad 3: Určení věku syna a matky.

d) Příklad 4: Doplnění tabulky + určení průměrné známky 8. A z matematiky.

e) Příklad 5: Výpočet délky stěnové úhlopříčky v krychli ABCDEFGH.

f) Příklad 6: Výpočet obsahu vyznačené plochy.

g) Bonusový příklad: Magický čtverec

a, nevím jak to vypočítat, c, nevím jak to vypočítat, d, zapomněl jsem jak počítat procenta, e,

7) Která probíraná témata matematiky jsou pro vás nejsnadnější?

sčítání a odčítání mnohočlenů

8) Kterému tématu matematiky byste v hodinách věnovali více času na procvičení? Uveďte proč?

rovnice, mocniny, odmocniny, obsahy, obvody, objemy krychle, kvádru, procenta. Protože jsem to zapomněl a už to moc neumím počítat.

TECHNICKÁ UNIVERZITA V LIBERCI
FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

VÝSTUPNÍ TEST PRO 9.ROČNÍK

Délka testu 40 min.

Pomůcky: psací potřeby, kalkulačka

PŘÍKLAD 1: Určete nejmenší společný násobek a největší společný dělitel čísel 420 a 2310.

násobek: 2 //
dělitel: 210 ✓

PŘÍKLAD 2: Určete podmínky, za kterých má následující výraz smysl: $\frac{a^2+3}{3a^2-a}$

PŘÍKLAD 3: Matce je 24 let, dceři 4 roky. Za kolik let bude matka 3x starší než její dcera?

PŘÍKLAD 4.: V meteorologické stanici naměřili v dvaceti po sobě jdoucích letech dne 1.4. následující teploty: 14°C; 18°C; 16°C; 16,5°C; 15°C; 15,6°C; 10,8°C; 14°C; 16,5°C; 15°C; 16,5; 10°C,8°C; 11°C, 16,5°C;18°C; 14°C; 15,6°C; 11°C; 10,8°C. Jaká je průměrná teplota teplot za posledních 20 let dne 1.4.? Doplň tabulku.

teplota (°C)	počet dní ve kterých byla teplota naměřena
14	3 ✓
18	2 ✓
16	1 ✓
16,5	4 ✓
15	2 ✓
15,6	2 ✓
10,8	2 ✓
10	1 ✓
8	1 ✓
11	2 ✓

Průměrná teplota= 6,7°C //

PŘÍKLAD 5: Pyramida v Egyptě se čtvercovou podstavou je vysoká 145 m. Výška její stěny je 1850 dm. Spočítejte délku hrany podstavy. k pytágorově větě

PŘÍKLAD 6: Vypočítej obsah rovnostraného Δ ABC s délkou strany a = 6 cm.

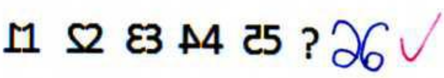
ko!

$S = a \cdot \frac{v_a}{2}$ ✓

$S = 6 \cdot \frac{6}{2}$

$S = 18\ cm^2$

BONUSOVÝ PŘÍKLAD: Doplňte následující řady:



$\frac{a}{2}; \frac{a-1}{4}; \frac{a-2}{8}; \frac{a-3}{16}; ?\ \frac{a-4}{32}$ ✓

(2) $\dfrac{a^2+3}{3a^2-a}$

$3a^2-a\neq 0$

$a\cdot(3a-1)\neq 0$

$\boxed{a\neq 0}$ ✓ $\quad 3a-1\neq 0$

$3a\neq 1 \quad /:3$

$\boxed{a\neq \frac{1}{3}}$ ✓

(3) ~~24+x~~ $24+x=3\cdot(4+x)$

$24+x=12+3x \quad /-24-3x$

$x-3x=12-24$

$-2x=-12 \quad /:(-2)$

$\underline{\underline{x=6}}$ ✓

Matka bude za 6 let 3x starší než dcera. ✓

(4) $134{,}9:20=$ ~~6,74~~ $\underline{6{,}745\,°C}$ //

(5) ~~$c=a+b$~~

~~$c=145+185$~~

~~$c=330$~~

~~$c=182\,m$~~

~~$c^2=a^2+b^2$~~

~~$c^2=21025+34225$~~

~~$c^2=55250$~~

~~$c=235\,m$~~

$c^2-b^2=a^2$

$21025-34225=a^2$

$13200=a^2$

$\sqrt{13200}=a$

$a=\underline{\underline{115\,m}}$ ✓ ✗